PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL (F. Rouvière, Cassini 2009)

REMARQUES SUR LA TROISIÈME ÉDITION

p. 177-178 (Exercice 59, question 3) : L'application G étant a priori seulement continue, il en va de même des lacets γ_s. On peut toutefois définir l'intégrale d'une 1-forme *fermée* sur un chemin continu, et c'est en ce sens que doivent être pris les indices $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_s}\frac{dz}{z}$. L'invariance par homotopie de lacets reste valable dans ce cas, ce qui permet de conclure. Pour plus de détails, voir [9] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques...*, p. 57-63 (ou [20a] Doukhan et Sifre p. 189). Ces références sont donc préférables à celles faites p. 178 à Dieudonné, qui suppose plus de régularité sur les chemins. Je remercie Colin Faverjon pour avoir attiré mon attention sur ce point.
p. 178-179 (Exercice 59, question 4) : Une solution plus élégante et plus courte m'a été communiquée par David Chiron. Si $x \mapsto v(x)$ est un champ rentrant dans la sphère S, continu et partout non nul sur la boule B, alors $V(x) = v(x)/\left\|v(x)\right\|$ définit une application continue de B dans S. Par le théorème de Brouwer elle admet un point fixe : il existe donc $x_0 \in B$ tel que $V(x_0) = x_0$; en fait x_0 appartient à S puisque V prend ses valeurs dans S. Par suite $x_0 \cdot V(x_0) = \left\|x_0\right\|^2 = 1$, d'où $x_0 \cdot v(x_0) = \left\|v(x_0)\right\|$ ce qui contredit l'hypothèse $x \cdot v(x) < 0$ pour tout $x \in S$.
p. 181 (Note en bas de page) : La norme $\|.\|_k$ est utilisée notamment dans Brézis, *Analyse fonctionnelle* (Masson 1993) p. 104.