Agrégation Analyse (F. Rouvière) **Oral**

UTILISATION DE LA DÉNOMBRABILITÉ EN ANALYSE

(quelques idées sur l'...)

Références

[D] Dieudonné, *Éléments d'analyse* tome 1, Gauthier-Villars : à feuilleter en tous sens, car l'auteur avoue (p. VIII) : Au risque de me faire honnir, j'ai donc pris pour devise que "le dénombrable seul existe à l'infini"...
[B] Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson
[Ca] Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, Hermann
[CL] Chambert-Loir et al., *Exercices d'analyse*, tome 1, Masson
[Ch] Choquet, *Topologie*, Masson
[F] Faraut, *Calcul intégral*, Belin
[G] Gourdon, *Les maths en tête, analyse*, Ellipses
[MV] Moisan et Vernotte, *Topologie et séries*, Ellipses
[P] Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses
[ZQ] Zuily et Queffélec, *Eléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson.

0. Dénombrable

Rappel ([D] p.14) : toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie soit en bijection avec $\mathbb{N}$ tout entier.

Définir un ensemble "dénombrable" comme "en bijection avec $\mathbb{N}$" exclut les ensembles finis. On préfèrera parler plutôt de "fini ou dénombrable", ou encore "au plus dénombrable". Ainsi toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, car l'application $(p, q) \mapsto 2^p 3^q$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est injective (par unicité de la décomposition en facteurs premiers), donc identifie $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à une partie (évidemment infinie) de $\mathbb{N}$. Pour une autre preuve, par numérotation "en triangle" des éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, voir [D] p.15.

Par suite $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

La réunion d'une famille (au plus) dénombrable d'ensembles (au plus) dénombrables est (au plus) dénombrable.

Exercice. L'ensemble des applications de $\{0, 1\}$ dans $\mathbb{N}$ est dénombrable. L'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$ ne l'est pas.

1. Dénombrabilité sur $\mathbb{R}$

a. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, pour l'une des raisons suivantes :

(*i*) il est impossible de numéroter tous les développements décimaux ([P] p. 19-20)

(*ii*) si $\mathbb{R}$ était réunion dénombrable de points, il serait de mesure de Lebesgue 0

(*iii*) dans l'espace métrique complet $\mathbb{R}$, une réunion dénombrable de points ne peut pas être $\mathbb{R}$ tout entier (théorème de Baire).

(*iv*) voir aussi [D] p.23.

L'ensemble des nombres algébriques étant, lui, dénombrable (expliquer pourquoi), il doit donc exister des nombres réels qui ne sont pas algébriques, appelés nombres transcendants - preuve non constructive s'il en est, due à Georg Cantor (1874)[1].

[1] Dans Collette, Histoire des mathématiques, tome 2, on lit p.217 : "L'année 1874 fut très importante pour Cantor, car c'est l'année de son mariage avec Vally Guttman, puis la naissance de la théorie des ensembles."

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une famille (au plus) dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints ([P] p.24).

$\mathbb{Q}$ n'est pas intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$ (ces ouverts, contenant $\mathbb{Q}$, seraient denses; comme $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est évidemment intersection dénombrable d'ouverts denses (les complémentaires des points rationnels), il en serait de même de $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \emptyset$, en contradiction avec le théorème de Baire).

b. Notons $disc(f)$ l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction f.

Si f est monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $disc(f)$ est au plus dénombrable : à chaque $a \in disc(f)$ on peut associer un rationnel choisi dans l'intervalle "de saut" $]f(a-0), f(a+0)[$; ces intervalles étant deux à deux disjoints, cela donne une injection de $disc(f)$ dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$ ([P] p.82).

Si f est réglée (i.e. admet des limites à gauche et à droite finies en tout point) sur un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $disc(f)$ est au plus dénombrable : car, sur chaque intervalle compact, f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier f_n, d'où $disc(f) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} disc(f_n)$ par la convergence uniforme. Les $disc(f_n)$ étant finis, on voit que $disc(f)$ est au plus dénombrable ([P] p.83).

Si f est une fonction quelconque, $disc(f)$ est toujours une réunion dénombrable de fermés ([G] p.60, grâce à la notion d'oscillation d'une fonction en un point). Par suite et par Baire, il n'existe aucune fonction f sur $\mathbb{R}$ qui soit continue aux points rationnels et discontinue aux irrationnels ([MV] p.12 ; car $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est pas réunion dénombrable de fermés, cf. **a**). Mais la fonction $f(x) = 0$ si x irrationnel, $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ (fraction irréductible) est continue aux points irrationnels et discontinue aux rationnels...

c. Soient I un ensemble d'indices et $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels positifs, i.e. $\sum_{i \in I} u_i < \infty$. Alors les u_i sont nuls sauf au plus une infinité dénombrable d'entre eux ([Ch] p.212 ; car pour tout entier $n \geq 1$ l'ensemble $A_n = \{i \in I | u_i \geq 1/n\}$ est nécessairement fini, et l'ensemble $\{i \in I | u_i \neq 0\}$ est la réunion de ces A_n.)

2. Dénombrabilité en topologie générale

C'est par l'usage de *suites* qu'intervient souvent le dénombrable en topologie.

a. Un espace métrique est dit *séparable* s'il possède une partie dénombrable dense (exemples $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$).

Un espace métrique est séparable si et seulement s'il admet une base dénombrable d'ouverts ([D] p.42).

Un espace normé est séparable si et seulement s'il admet une suite totale (i.e. qui engendre un sous-espace vectoriel dense) : raisonner sur les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels... ([D] p.114).

Tout espace métrique compact est séparable (on peut en effet recouvrir l'espace par un nombre fini de boules de rayon $1/n$; les centres de ces boules pour $n = 1, 2, ...$ forment une suite dense dans l'espace ; [D] p.60).

La plupart des espaces de fonctions usuels en analyse sont séparables, comme $C([a, b])$, ℓ^p et $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < \infty$ ([B] p.62), etc. Mais ℓ^∞ et $L^\infty(\mathbb{R})$ ne le sont pas :
Exercice. L'espace ℓ^1 est séparable [considérer le sous-ensemble formé des suites rationnelles à support fini]. Les espaces ℓ^∞ et $L^\infty(\mathbb{R})$ ne le sont pas ([B] p.66) [observer qu'un espace normé ne peut être séparable s'il admet une infinité dénombrable d'éléments à distance 1 les uns des autres, et considérer les suites de 0 et de 1 dans ℓ^∞, ou les fonctions caractéristiques des intervalles $[a, \infty[$ dans L^∞].

Soit X un espace topologique compact. Alors X est métrisable si et seulement si l'espace $C(X)$ des fonctions numériques continues sur X, muni de la norme de la convergence uniforme, est séparable. (Idée de la preuve : si (f_n) est une suite dense dans $C(X)$, on vérifie que

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf\left(1, |f_n(x) - f_n(y)|\right)$$

est une distance qui définit la topologie de X. Réciproquement, si (a_n) est une suite dense de l'espace métrique compact (X,d), les fonctions $f_n(x) = d(x, a_n)$ engendrent une sous-algèbre dense de $C(X)$ par le théorème de Stone-Weierstrass... [D] p.141, [ZQ] p.178).

Théorème de Banach-Alaoglu. Soient E un espace normé séparable, E' l'espace des formes linéaires continues sur E (muni de la norme duale) et soient B, B' les boules unité fermées de E et E' respectivement. Si (a_n) est une suite dense de B, l'expression

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf\left(1, |f(a_n) - g(a_n)|\right) \text{ , pour } f, g \in B' \text{ ,}$$

définit une distance sur B', pour laquelle B' est compacte. De plus une suite (f_k) converge vers f dans B' au sens de d si et seulement si $f_k(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$ (convergence simple sur E). Voir [ZQ] p.146.

Mais sur l'espace de toutes les applications de $[0,1]$ dans lui-même, la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable ([Ch] Exercice 107 p.113).

b. On peut citer à nouveau le *théorème de Baire* sur un espace métrique complet, et quelques applications ([G] p. 391 sq.).

c. Le procédé de *suite diagonale* est un outil important pour établir divers résultats de compacité: compacité du cube de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ([CL] p. 42, [MV] p.14), théorème d'Ascoli ([Ch] p.93), théorème de Montel ([Ca] p.169). L'idée est de construire une suite de suites, chacune extraite de la précédente, et de former la suite diagonale en prenant le n-ème terme de la n-ème suite ; cette nouvelle suite héritera des bonnes propriétés de chacune des suites de départ...

3. Dénombrabilité et espaces de Banach ou Hilbert

Aux résultats déjà cités en **2** on peut ajouter les suivants.

Un espace de Hilbert est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable ([Ch] p.261).

Il n'existe pas d'espace de Banach de dimension dénombrable ([G] p.393 ; un tel espace serait réunion dénombrable de sous-espaces de dimension finie, fermés et d'intérieur vide, d'où le résultat par Baire).

Par suite un espace de Hilbert ayant une base *hilbertienne* dénombrable n'est pas à base dénombrable (au sens de l'algèbre linéaire).

Si un Hilbert a une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors toute autre base hilbertienne $(f_i)_{i\in I}$ est aussi dénombrable ([Ch] p.263). En effet, Parseval dans la base (f_i) donne

$$\|e_n\|^2 = 1 = \sum_{i\in I} |(e_n, f_i)|^2 \text{ ,}$$

donc l'ensemble $A_n = \{i \in I | (e_n, f_i) \neq 0\}$ est au plus dénombrable (voir **1.c** ci-dessus). De plus, Parseval dans la base (e_n) donne

$$\|f_i\|^2 = 1 = \sum_{n} |(e_n, f_i)|^2 \text{ ,}$$

donc pour tout i il existe n tel que $(e_n, f_i) \neq 0$. Par suite $I = \cup A_n$, qui est dénombrable.

4. Dénombrabilité et théorie de la mesure

La dénombrabilité, qui apparaît dès la définition même des tribus et mesures, joue un rôle essentiel dans les axiomes et les principaux théorèmes de cette théorie. La notion de mesure perdrait tout intérêt si on omettait le mot "dénombrable" dans l'axiome "la mesure d'une réunion dénombrable disjointe est la somme des mesures" : $\mathbb{R}$, réunion (non dénombrable) de ses points serait alors de mesure de Lebesgue nulle...

Toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est de mesure (de Lebesgue) nulle. L'ensemble de Cantor est de mesure nulle mais non dénombrable ([CL] p.34).

Le célèbre théorème de convergence dominée de Lebesgue $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ s'établit pour des suites de fonctions (la dénombrabilité est essentielle dans la preuve du théorème de convergence monotone, d'où se déduit celui de convergence dominée [F] p.8 et 16). On passe de là à la version à paramètre continu

$$\lim_{t \to t^0} \int f(t, x)\, dx = \int \lim_{t \to t^0} f(t, x)\, dx \ ,$$

grâce au fait que $\mathbb{R}$ est à base dénombrable d'ouverts : raisonner sur la suite de fonctions $f_n(x) = f(t_n, x)$, où (t_n) est une suite quelconque tendant vers t^0 dans $\mathbb{R}$.