Agrégation Analyse (F. Rouvière) **11.1.05**

CUBE DE HILBERT, SUITE DIAGONALE, CANTOR

On appelle *cube de Hilbert* l'ensemble E des suites $u = (u_n)_{n\geq 1}$ de $[0,1]$, muni de

$$\delta(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n - v_n|}{2^n} \text{ pour } u, v \in E \ .$$

1.a. Montrer que δ définit sur E une structure d'espace métrique.
b. Montrer qu'une suite (u^k) converge vers u dans E si et seulement si, pour chaque n, la composante u_n^k tend vers u_n dans $[0,1]$ quand $k \to \infty$.
c. Soient X un espace métrique et $f : X \to E$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si, pour chaque n, l'application $x \mapsto u_n = (f(x))_n$ est continue de X dans $[0,1]$.
d. Montrer que E est connexe par arcs.

2. Montrer que E *est compact* : si (u^k) est une suite de E, on cherchera à en extraire une sous-suite convergente grâce au *procédé de suite diagonale*.

3. Soit X un espace métrique compact, muni d'une distance d que l'on peut supposer comprise entre 0 et 1 (pourquoi?).
a. Montrer que X est séparable (c'est-à-dire admet une suite dense (a_n)).
b. En considérant l'application $x \mapsto (d(x,a_n))_{n\geq 1}$ de X dans E, montrer que X est homéomorphe à un sous-espace de E.

4. Soit C *l'ensemble de Cantor*, défini comme l'ensemble des $x \in [0,1]$ qui admettent un développement en base 3 ne contenant aucun chiffre 1 :

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots \ , \text{ avec } x_n = 0 \text{ ou } 2 \text{ pour tout } n \ .$$

À $x \in C$ on associe la suite $u = (u_n) = f(x)$ définie par $u_n = \frac{1}{2} x_n$. L'ensemble C étant muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$, montrer que cette application est un homéomorphisme de C sur un sous-espace de E.
[En comparant les développements ternaires de x et y, on pourra montrer que, pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} |x - y| &< \frac{1}{3^N} \text{ entraîne } \delta(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2^N} \ , \\ \delta(f(x), f(y)) &< \frac{1}{2^N} \text{ entraîne } |x - y| \leq \frac{1}{3^N} \ . \end{aligned}$$

Référence. Chambert-Loir & C°, tome 1, p.42.