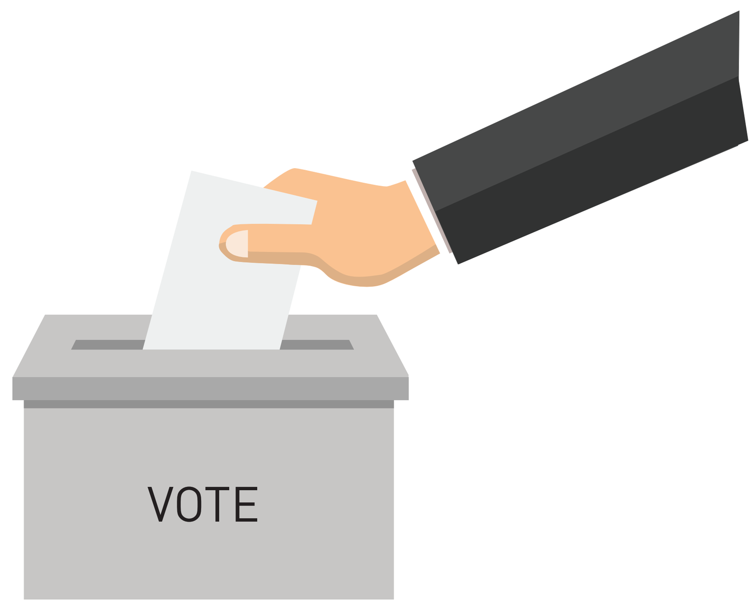
{Les Maths de A à Z}

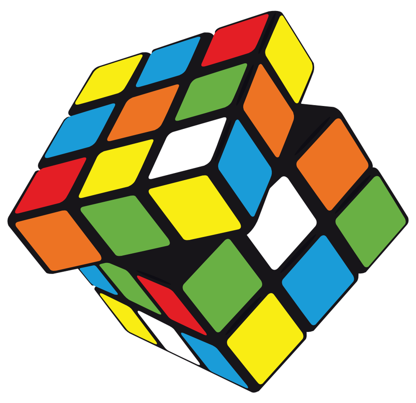
Pourquoi est-il si difficile de prévoir le temps qu'il fera dans une semaine ? Peut-on faire confiance aux sondages ? Comment « entendre » la forme d'un instrument de musique ?

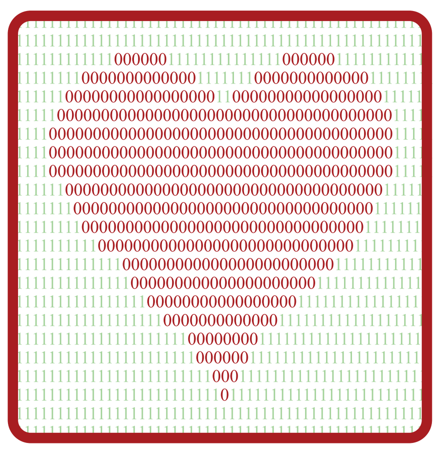
Les mathématiciens aujourd'hui s'intéressent à bien d'autres objets que les nombres et les figures géométriques. Leurs recherches abordent des questions variées, des plus abstraites aux plus proches de notre quotidien, certaines déjà bien comprises, d'autres restant encore à résoudre.

Au fil des **26 lettres de l'alphabet**, découvrez, en une langue simple et accessible, quelques thèmes de la recherche actuelle en mathématiques.

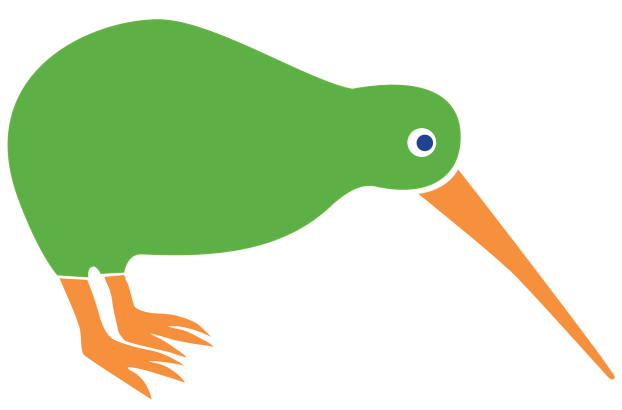


Rédaction :
Sébastien **DESCOTES-GENON**, Nicolas **GRANER**, Maxime **INGREMEAU**, Séverine **MARTRENCHARD**.





Une exposition scientifique réalisée en 2016 par le **Centre de Vulgarisation de la Connaissance,** service de la Faculté des Sciences de l'Université Paris-Sud soutenu par le CNRS.



www.cvc.u-psud.fr

Conception graphique et illustration :
Anne **VANBIERVLIET**.

Centre de Vulgarisation de la Connaissance

Université Paris Sud — Faculté des Sciences d'Orsay — université Paris-Saclay

CNRS

Affaires

Mon entreprise de bonbons aura besoin de chocolat dans 6 mois. Comment être sûr de ne pas le payer trop cher ?

Si j'achète mon chocolat maintenant mais que le prix du chocolat diminue ensuite, j'aurai perdu de l'argent. Mais si j'attends pour acheter mon chocolat mais que son prix augmente beaucoup, j'aurai aussi perdu. Que faire ?

L'évolution du prix d'une matière première ou d'une action est un processus très complexe. Il est donc impossible de prédire précisément la valeur du chocolat dans 6 mois.

Le modèle de Black-Scholes a pour hypothèse que le prix du chocolat évolue au cours du temps de manière continue et aléatoire, et que je peux investir mon argent à la banque à taux fixe. On en déduit une stratégie optimale dans laquelle on achète ou on vend du chocolat quotidiennement, selon sa valeur du moment. À condition de ne pas manger tout le chocolat !

Ce modèle est couramment utilisé par les fonds d'investissements ; pourtant, le modèle de Black-Scholes sous-estime la probabilité d'événements extrêmes, comme les krachs boursiers. La théorie du chaos modélise souvent mieux ces phénomènes.

Bretagne

Comment mesurer la distance précise qui sépare Brest de Douarnenez en longeant la mer ?

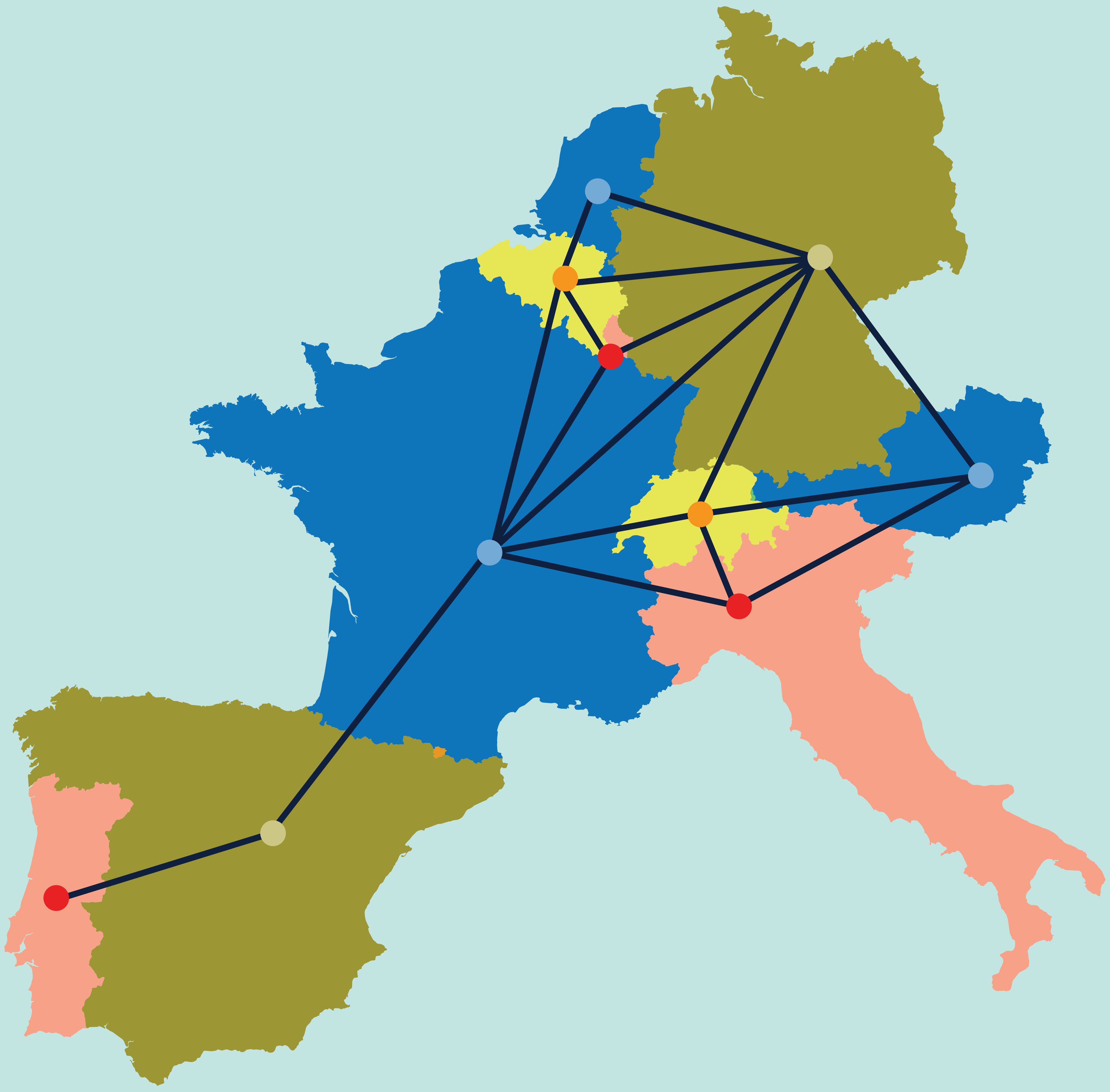
Selon que vous utiliserez une carte de France, une carte de Bretagne, une carte du Finistère... ou un podomètre, le résultat sera différent. La distance obtenue augmente avec le niveau de précision : la ligne de côte se compose de renfoncements, qui eux-mêmes contiennent des renfoncements plus petits, invisibles sur la carte à grande échelle, qui eux-mêmes...

Pour les mathématiciens, le littoral est un objet fractal, c'est-à-dire qu'on retrouve des détails similaires sur un grand éventail d'échelles.

Une telle courbe ne peut être « mise en équation » de façon classique alors que la modélisation sous forme de fractale y parvient, comme pour de très nombreuses autres courbes ou surfaces : la structure d'une fougère, d'une plume d'oiseau, la foudre... mais aussi l'évolution de la démographie.

Les objets fractals naturels ne reproduisent pas indéfiniment le même motif à toutes les échelles mais les mathématiciens peuvent concevoir des objets où c'est le cas grâce à des fonctions mathématiques ou à des règles de construction géométriques.

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr



Coloriage

Vous voulez colorier les pays sur une carte sans que deux pays qui se touchent soient de la même couleur ? Quatre crayons suffiront, quelle que soit la carte.

Pour étudier cette question, on peut simplifier la carte en prenant seulement un point dans chaque pays et en reliant par une ligne les points dont les pays se touchent. Le schéma obtenu est un graphe, un outil mathématique utilisé dans de nombreux domaines.

Par exemple, la répartition d'animaux sauvages dans des enclos en séparant les espèces incompatibles peut aussi être vue comme un problème de coloriage de graphe. On modélise par des graphes toutes sortes de réseaux (électrique, routier, téléphonique...) pour résoudre des problèmes comme : trouver le chemin optimal entre deux points, ou identifier les points critiques où une panne aurait le plus de conséquences.

La démonstration du « théorème des quatre couleurs », en 1976, est la première preuve mathématique publiée dont certaines étapes ont nécessité l'aide d'un ordinateur. Certains mathématiciens considèrent cette démonstration comme incomplète car il n'est pas formellement prouvé que le programme informatique utilisé ne comportait pas d'erreurs.

Données

D'après le dernier sondage publié, à l'élection présidentielle de 2027, Céline recueillera 57 % des voix, et Damien 43 %.
Céline est-elle certaine d'être élue ?

Quand on réalise un sondage, on ne demande évidemment pas son avis à toute la population, mais seulement à un petit nombre d'individus. Ici, parmi 1000 sondés, 570 préfèrent Céline, et 430 Damien. Il est donc parfois possible de se tromper : peut-être que les 1000 personnes ont été très mal choisies, et que le reste de la population préfère Damien ! Toutefois, ceci est très improbable : on peut calculer que, si les électeurs ne changent pas d'avis, Céline obtiendra entre 53 % et 60 % des voix avec une probabilité de 95 %.

Les sondages peuvent avoir tort, mais les statistiques permettent de calculer la probabilité qu'un sondage se trompe. Une information qu'on trouve trop rarement dans les médias !

La fiabilité d'un sondage ne dépend pas de la population totale : interroger 1000 personnes pour l'élection présidentielle sera aussi fiable au Brésil qu'en Islande. En revanche, on peut améliorer la fiabilité d'un sondage en récoltant davantage de données.

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr

Ensemble

Dans le village d'Absurdeville, la loi dit à l'unique barbier qu'il doit raser tous les hommes ne se rasant pas eux-mêmes, et eux seulement. Et le barbier ? Il sera toujours hors-la-loi !

S'il se rase lui-même, il aura rasé quelqu'un qui se rase lui-même !
Et s'il ne se rase pas lui-même, il n'aura pas fait son devoir de raser ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes.

Ainsi, certaines lois simples peuvent contenir un paradoxe caché. C'est particulièrement gênant pour les mathématiciens intéressés par les ensembles.

On a longtemps pensé qu'on pouvait définir un ensemble en énonçant la propriété commune de tous ses éléments. Par exemple, l'ensemble des boulangers d'Absurdeville, ou bien l'ensemble des nombres pairs.

Toutefois, on peut aboutir ainsi à des paradoxes : ainsi, l'ensemble des ensembles ne se contenant pas eux-mêmes est tout aussi paradoxal que notre barbier...

La plupart des mathématiciens choisissent de voir tous les objets mathématiques (nombres, figures...) comme des ensembles. Et pour éviter les paradoxes, tous ces ensembles sont définis non à partir d'une propriété générale, mais à partir d'une construction explicite.

Fermat

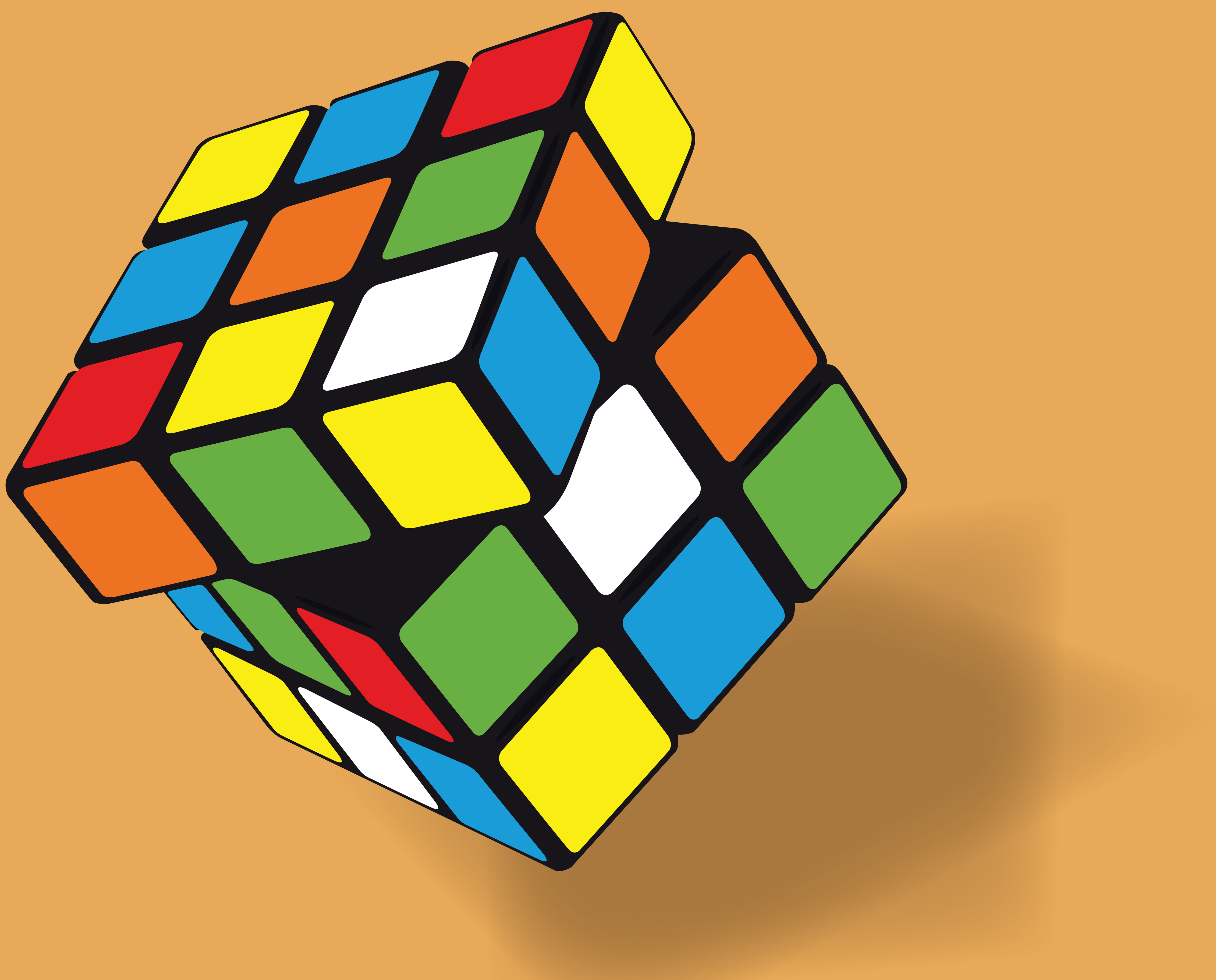
Comment affoler les mathématiciens ?
Griffonnez un théorème dans un livre… sans écrire la preuve, « faute de place » !

Vers 1637, Pierre de Fermat écrit ainsi qu'il n'existe aucune solution à l'équation $a^n + b^n = c^n$ avec a, b, c entiers et n valant 3 ou plus. Au fil des siècles, les mathématiciens prouvent des cas particuliers de cette conjecture. Finalement, Andrew Wiles imagine une preuve s'appuyant sur deux pans entièrement différents des mathématiques.

Le principe ? Si Fermat avait tort, son équation aurait une solution à l'aide de laquelle on pourrait construire une courbe géométrique dite « elliptique ». Mais cette même équation interdirait de lui associer une fonction appelée « forme modulaire ». Or Wiles démontre que toute courbe elliptique doit avoir pour partenaire une fonction modulaire !
La courbe n'existe donc pas, Fermat avait raison… et les récompenses pleuvent sur Wiles !

Andrew Wiles propose une première preuve en 1993. Mais plusieurs mathématiciens s'aperçoivent d'une erreur dans une partie essentielle de la démonstration. Il faudra à Wiles un an et l'aide d'un collègue, Richard Taylor, pour corriger la démonstration…

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr



Groupe

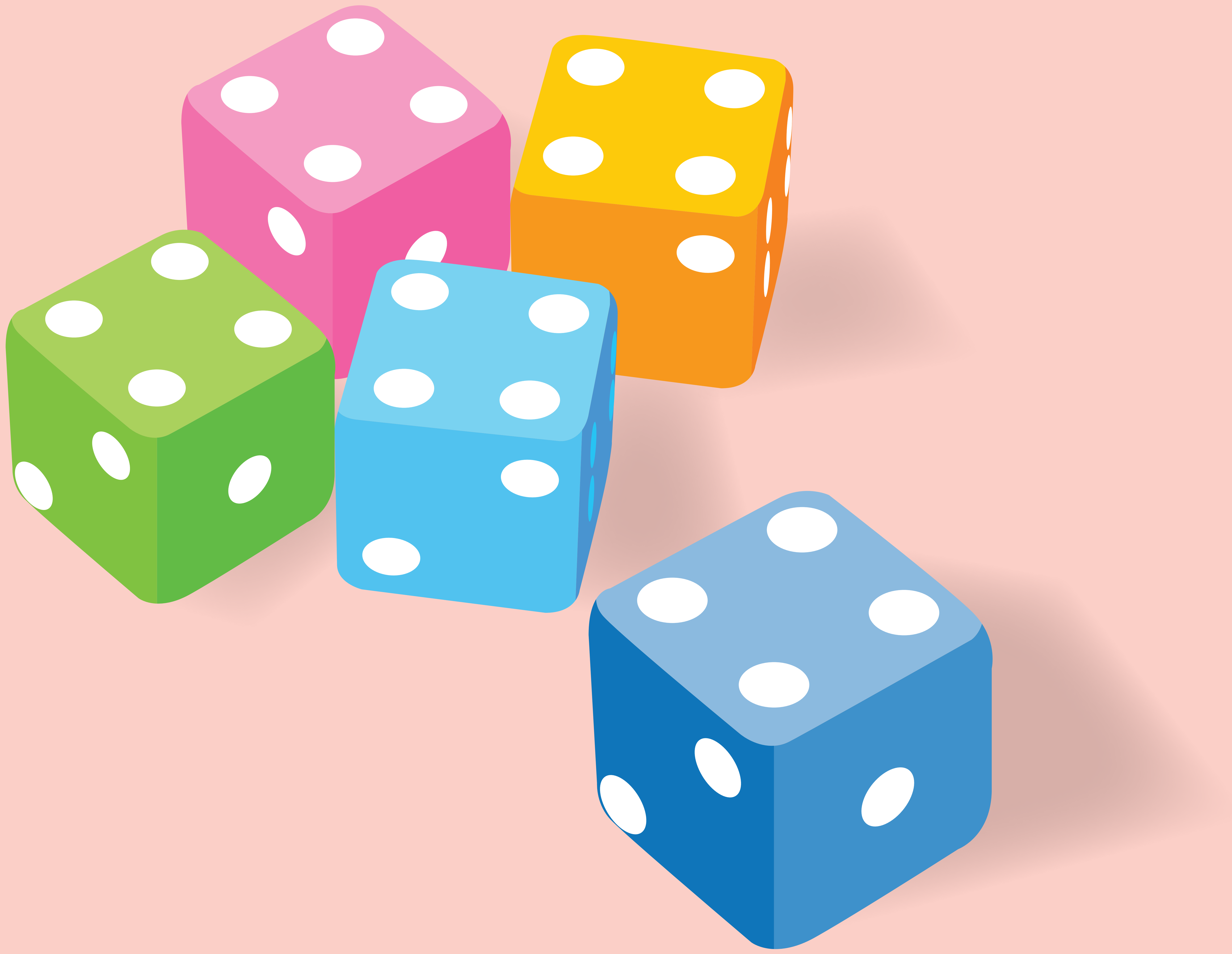
Si je répète 1260 fois n'importe quelle suite de transformations sur un Rubik's cube, je reviendrai toujours à ma configuration initiale.

Les transformations d'un Rubik's cube forment ce que les mathématiciens appellent un groupe, c'est-à-dire un ensemble de choses que l'on peut combiner. Par exemple, les nombres entiers forment un groupe : on peut combiner deux nombres en les sommant. Pour combiner deux transformations d'un Rubik's cube, il suffit de réaliser l'une, puis l'autre.

Attention : tourner la face avant puis celle du dessus, c'est différent de tourner la face du dessus, puis la face avant ! Au contraire, pour les nombres entiers, on a 2+3=3+2. Autre différence entre ces deux groupes : il n'y a qu'un nombre fini (mais très grand) de transformations possibles d'un Rubik's cube. C'est pourquoi en répétant suffisamment de fois une suite de transformations, on revient au point de départ.

Les groupes finis n'apparaissent pas que dans le Rubik's cube : ils peuvent modéliser les symétries d'un cristal, ou encore les propriétés des particules élémentaires. Classifier les groupes finis, voila l'un des grands projets des mathématiciens pour le XXIe siècle.

{Les Maths de A à Z}



Habitude

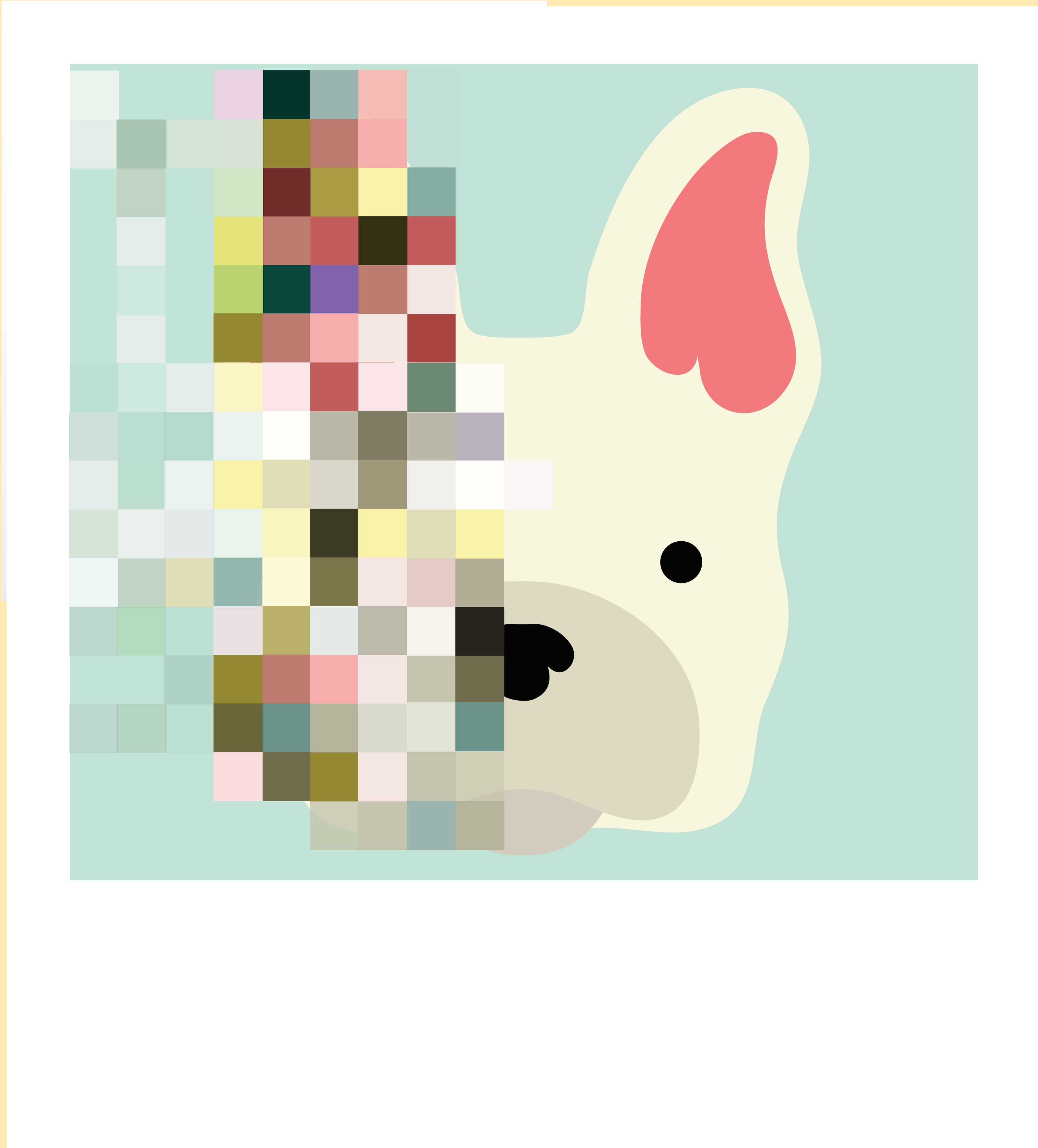
J'ai mis plus d'une heure et demie pour arriver au travail. Un embouteillage comme je n'en ai jamais vu ! D'habitude, il me suffit d'une demi-heure...

Pour les événements réguliers de notre existence, nous pensons souvent « en moyenne » : en moyenne, un Français mesure 1,76 mètres (et une Française 1,63), une pièce tombe la moitié du temps sur pile et l'autre moitié du temps sur face...

Mais quelle est la probabilité qu'un Français mesure 2,20 mètres, ou qu'une pièce lancée 1000 fois donne 800 « pile » ? Ces grandes déviations, événements rares mais pas impossibles, sont étudiées par la théorie des probabilités, qui contredit souvent notre intuition focalisée sur les seules moyennes. Une aide pour estimer les risques autour de nous, comme celui de devoir encore affronter un embouteillage géant !

{ *On appelle parfois « cygnes noirs » ces événements rares, aux conséquences potentiellement graves –crise boursière, accident de centrale nucléaire, effondrement d'écosystèmes... Dans ces cas dramatiques, il faut aussi contrôler la validité des modèles utilisés jusque dans ces situations très particulières.* }

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr



Image

Vous prenez une photo amusante avec votre téléphone et l'envoyez à votre meilleur ami qui la reçoit quelques secondes après. Comment une image peut-elle être transmise si rapidement ?

Une image numérique est composée de nombreux carrés minuscules appelés pixels. Chaque pixel comporte trois nombres, compris entre 0 et 255, qui indiquent la teneur en rouge, vert et bleu du carré. Cela fait énormément de nombres à envoyer d'un téléphone à l'autre ! Pour augmenter la vitesse de transmission, on peut comprimer les images en diminuant le nombre de pixels ou la précision des couleurs, donnant ainsi une image moins précise.

Si on souhaite transmettre rapidement l'image sans perdre d'information, une méthode couramment utilisée consiste à regrouper les pixels par carrés de 8 par 8. Dans chaque carré, on néglige les variations très rapides de couleur, invisibles à l'oeil nu, mais coûteuses en information.

Cette méthode n'est peut-être pas optimale. Les objets qui nous entourent ont souvent des propriétés géométriques particulières : par exemple, leurs bords sont souvent assez réguliers. Les mathématiciens espèrent améliorer la compression d'images en utilisant cette géométrie des objets.

Jeu

À Venise, deux gondoliers s'interrogent chacun de leur côté : dois-je baisser mes tarifs pour subtiliser des clients à mon concurrent ?

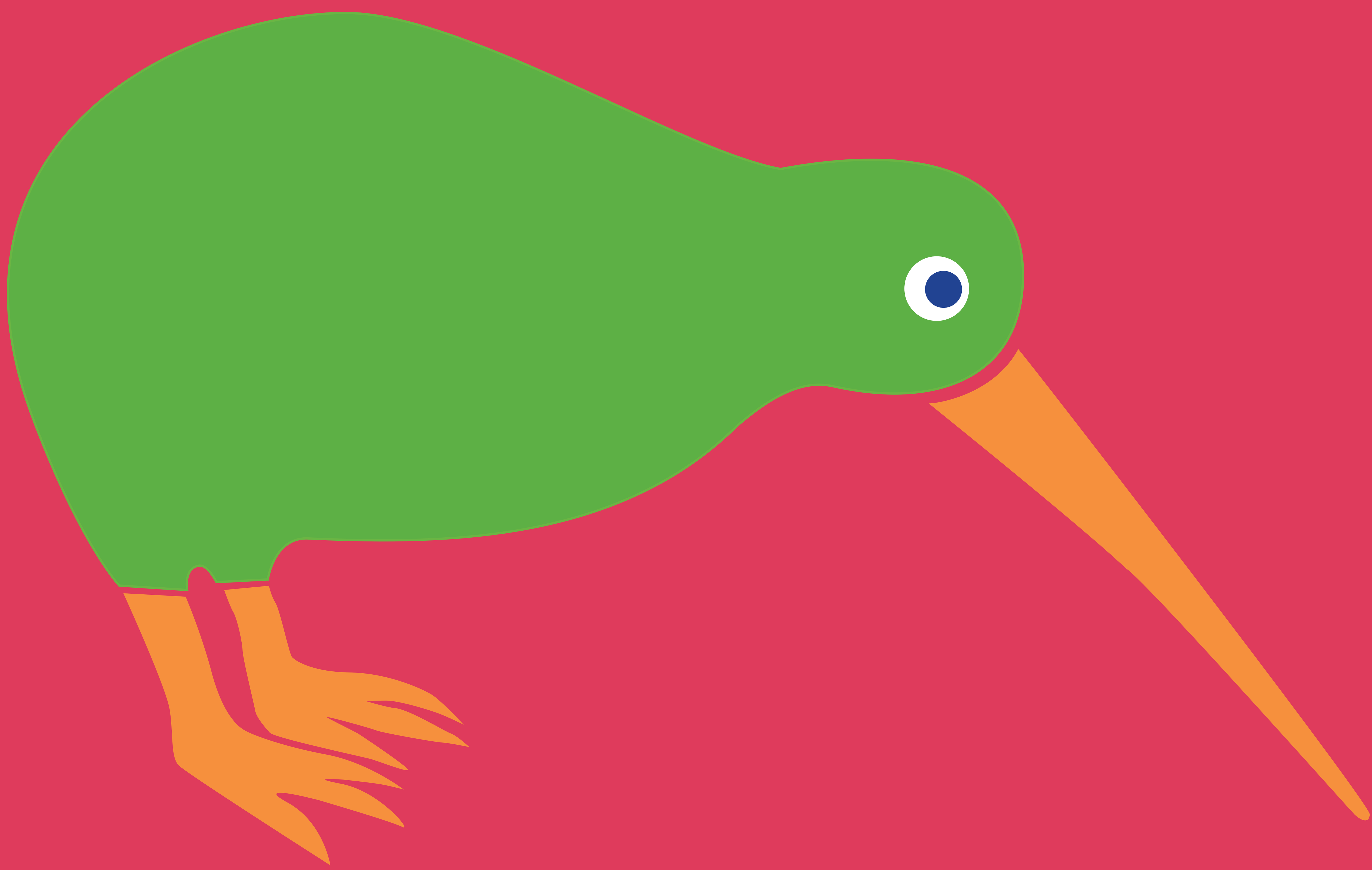
Si je ne baisse pas mes prix et que lui le fait, il va me prendre ma clientèle. Si je le fais et pas lui, c'est moi qui gagnerai et si nous le faisons tous les deux, nous garderons chacun nos clients.

Les réflexions séparées des gondoliers les amènent à baisser leurs prix, alors que la situation la plus favorable aux deux aurait été de ne rien changer.

Une telle question relève de la théorie des jeux, comme bien d'autres applications pratiques : par exemple, la procédure « Admission Post Bac » permet d'allouer à chaque bachelier le meilleur choix pour sa poursuite d'étude en fonction de ses résultats de terminale. Les mathématiciens ont pu montrer qu'un tel problème a au moins une solution optimale.

Les choix des humains ne sont pas toujours guidés par la stricte logique. Mathématiques et sciences cognitives collaborent pour ajouter cette part d'irrationnel aux modèles.

Les Maths de A à Z



Kiwi

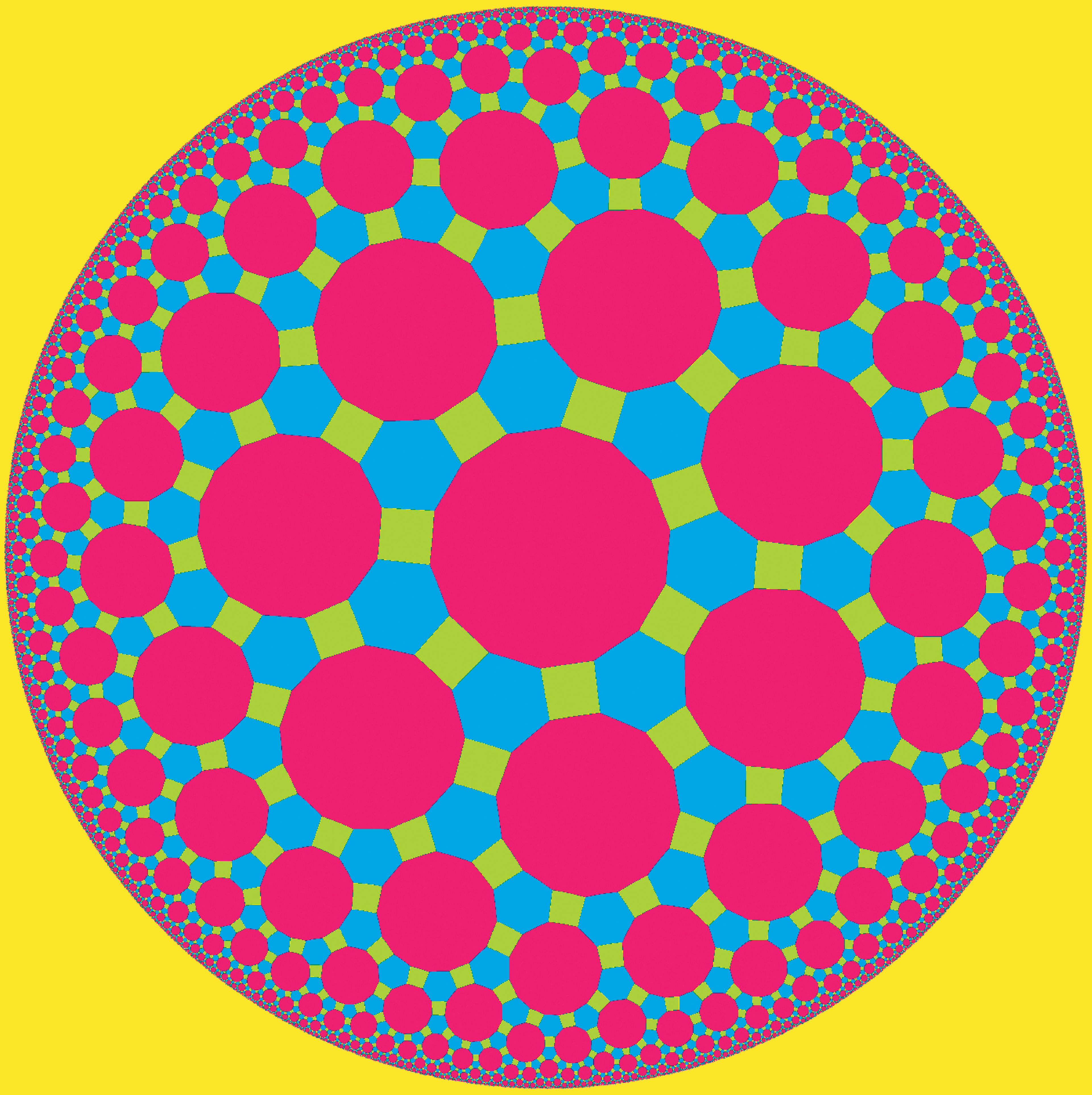
Il ne reste que 350 kiwis d'Okarito dans une petite portion du territoire néo-zélandais. Cela sera-t-il suffisant pour que cette espèce d'oiseaux survive ?

Pour répondre à cette question, les mathématiciens doivent incorporer les paramètres pertinents à leur modèle : quelle distance M^{me} Kiwi doit-elle parcourir pour trouver son M. Kiwi, à quel âge pond-elle ses premiers œufs, quel écart entre deux pontes, combien de poussins survivent, quelle espérance de vie ont M. et Mme Kiwi — ces deux derniers paramètres étant liés à la population des prédateurs, notamment. Les modèles de dynamique des populations deviennent vite très complexes !

Ils trouvent d'autres applications que le calcul des probabilités d'extinction : par exemple, ils aident à choisir les mesures à prendre en cas d'épidémie (fermeture des lieux publics, restriction des voyages, détermination de la fraction de la population à vacciner...).

Le modèle fondateur de Galton et Watson de 1874 décrivant l'extinction des noms de famille en Angleterre montra qu'un patronyme dont les porteurs ont un nombre moyen d'enfants strictement inférieur à 1 est amené à disparaître.

Les Maths de A à Z



Longueur

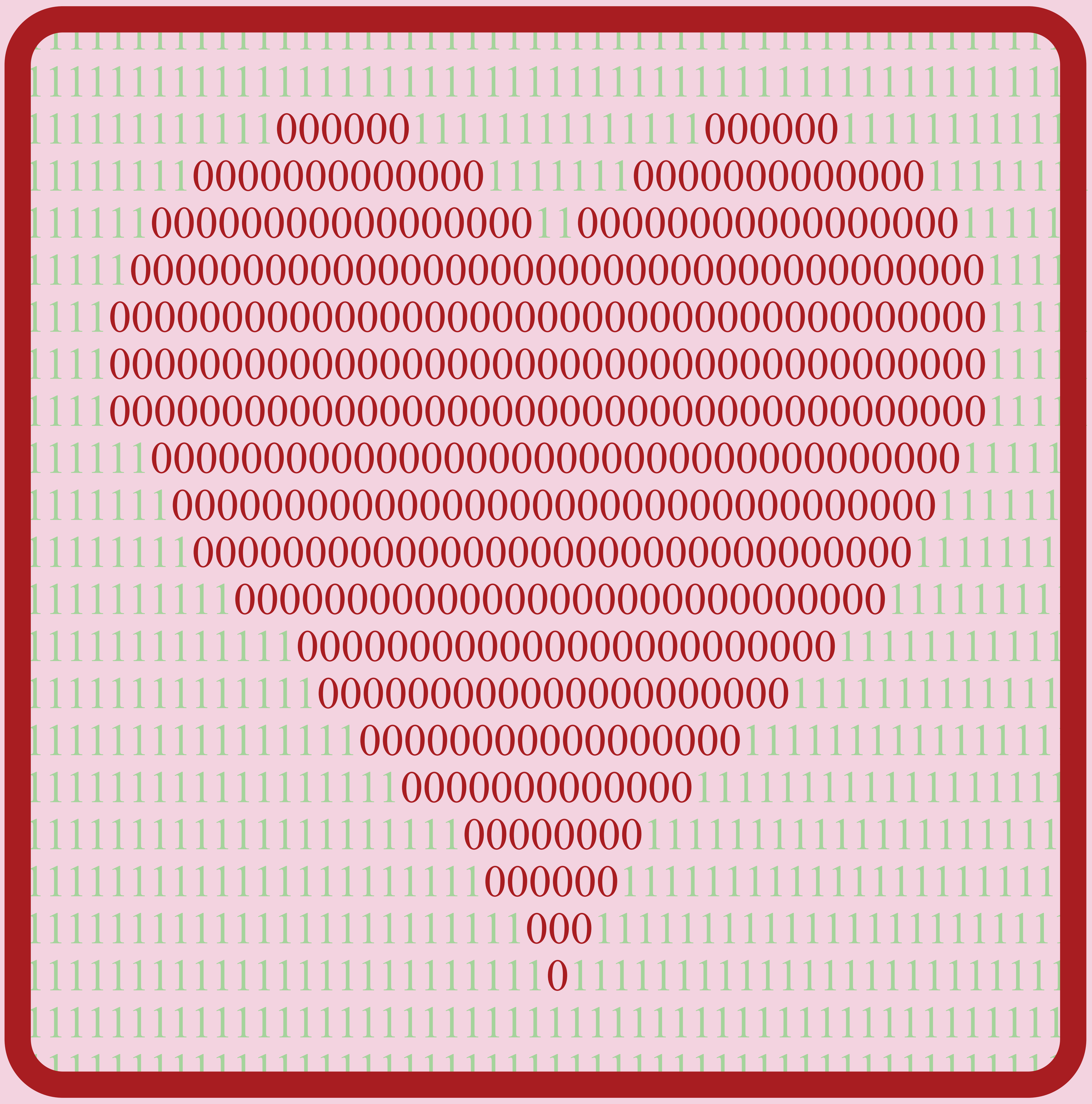
Imaginons qu'une sorcière trace un cercle de 2 mètres de rayon autour de vous, puis vous jette le sort suivant :
« Plus vous serez proche du bord du cercle, plus vous serez petit ». Votre premier pas vers la sortie fera un mètre, mais le suivant ne sera que de 50 cm, et ainsi de suite… Jamais vous ne sortirez de ce disque infernal !

Dans ce disque, appelé « espace hyperbolique » par les mathématiciens, quels sont les segments, c'est-à-dire les chemins permettant d'aller d'un point à un autre en faisant le moins de pas possible ? Ces « segments hyperboliques » ne sont pas des morceaux de droites, mais des arcs de cercle : en passant près du centre du disque, où je suis plus grand, j'économise des pas.

Quant aux « triangles hyperboliques », formés de trois segments hyperboliques, la somme de leurs angles vaut toujours moins de 180 degrés…

Il existe peu de manières de paver régulièrement un plan avec des objets tous identiques. Mais il existe une infinité de pavages de l'espace hyperbolique ! Certaines propriétés de ces pavages demeurent mystérieuses, et tiennent les mathématiciens en haleine.

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr



Message

Alice est amoureuse de Bob. Elle voudrait le lui écrire, mais comment être sûre que personne d'autre ne pourra lire son message ?

La science des messages secrets, la cryptographie, est pratiquée depuis des millénaires, surtout par les militaires et les diplomates. Traditionnellement, expéditeur et destinataire conviennent d'une « clé » secrète. L'expéditeur l'utilise pour chiffrer son message (le rendre incompréhensible), le destinataire pour déchiffrer le message et retrouver le texte original.

Des méthodes plus récentes, utilisées couramment sur Internet, sont dites asymétriques : la clé utilisée pour chiffrer est différente de celle permettant de déchiffrer. Si Bob publie sa clé de chiffrement sur sa page web, tout le monde pourra lui envoyer un message chiffré mais seul Bob, qui connaît la clé de déchiffrement correspondante, pourra en lire le contenu. Le secret d'Alice restera à l'abri des indiscrétions.

{ *La cryptographie asymétrique repose sur des fonctions mathématiques « à sens unique ». Par exemple, multiplier deux grands nombres est facile ; mais le problème inverse, retrouver deux nombres en connaissant uniquement leur produit, exige parfois un temps considérable, même avec un ordinateur très puisssant.* }

Nœud

Il arrive qu'un nœud fait sur une corde soit très difficile à démêler. C'est certainement encore plus difficile si les deux extrémités de la corde sont mises bout à bout.

C'est pourtant à ce jeu que se livrent les mathématiciens : pour eux, un nœud est toujours une courbe fermée. On dit que deux nœuds sont équivalents s'il est possible de déformer l'un pour obtenir l'autre. Par exemple, le nœud de trèfle ci-dessus n'est pas équivalent à un simple cercle.

Il est difficile de prouver rigoureusement que deux nœuds ne sont pas équivalents. C'est pourquoi les mathématiciens inventent et calculent des « invariants de nœuds ». Ce sont des nombres (liés par exemple au nombre de croisements dans le nœud) qui ne changent pas quand on déforme un nœud. Si deux nœuds n'ont pas les mêmes invariants, ils ne peuvent pas être équivalents !

{ *La molécule d'ADN est organisée en double hélice. Toutefois, cette double hélice est souvent enroulée, et peut former des nœuds très compliqués. Deux molécules d'ADN formant des nœuds non équivalents auront-elles le même effet ?*
Biologistes et mathématiciens devront coopérer pour le savoir... }

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr

Les Maths de A à Z

Ordinateur

Serait-il possible d'écrire un programme informatique qui détecte toutes les erreurs dans les autres programmes ? Hélas, non. Pas parce que nous ne savons pas comment faire, mais parce que c'est mathématiquement impossible.

Il n'existe même pas de méthode générale pour répondre à cette question simple : un programme donné s'arrêtera-t-il un jour ou « tournera-t-il » indéfiniment ?

En démontrant ce résultat en 1936, le mathématicien anglais Alan Turing a posé les bases de l'informatique théorique, discipline qui étudie les programmes informatiques comme des objets mathématiques. Elle s'intéresse à des questions indépendantes de la technologie des ordinateurs, souvent importantes en pratique, telles que : comment concevoir de meilleurs langages de programmation ? Peut-on écrire des programmes garantis sans erreurs pour des applications sensibles, comme le pilotage des avions ? Quels algorithmes sont les plus efficaces pour résoudre tel type de problèmes ?

Pour trouver le trajet le plus court passant par N villes données, les algorithmes connus exigent un temps de calcul qui augmente exponentiellement avec N. Qui découvrira une méthode de résolution plus efficace, ou prouvera qu'il n'en existe pas, remportera un prix d'un million de dollars !

Prévision

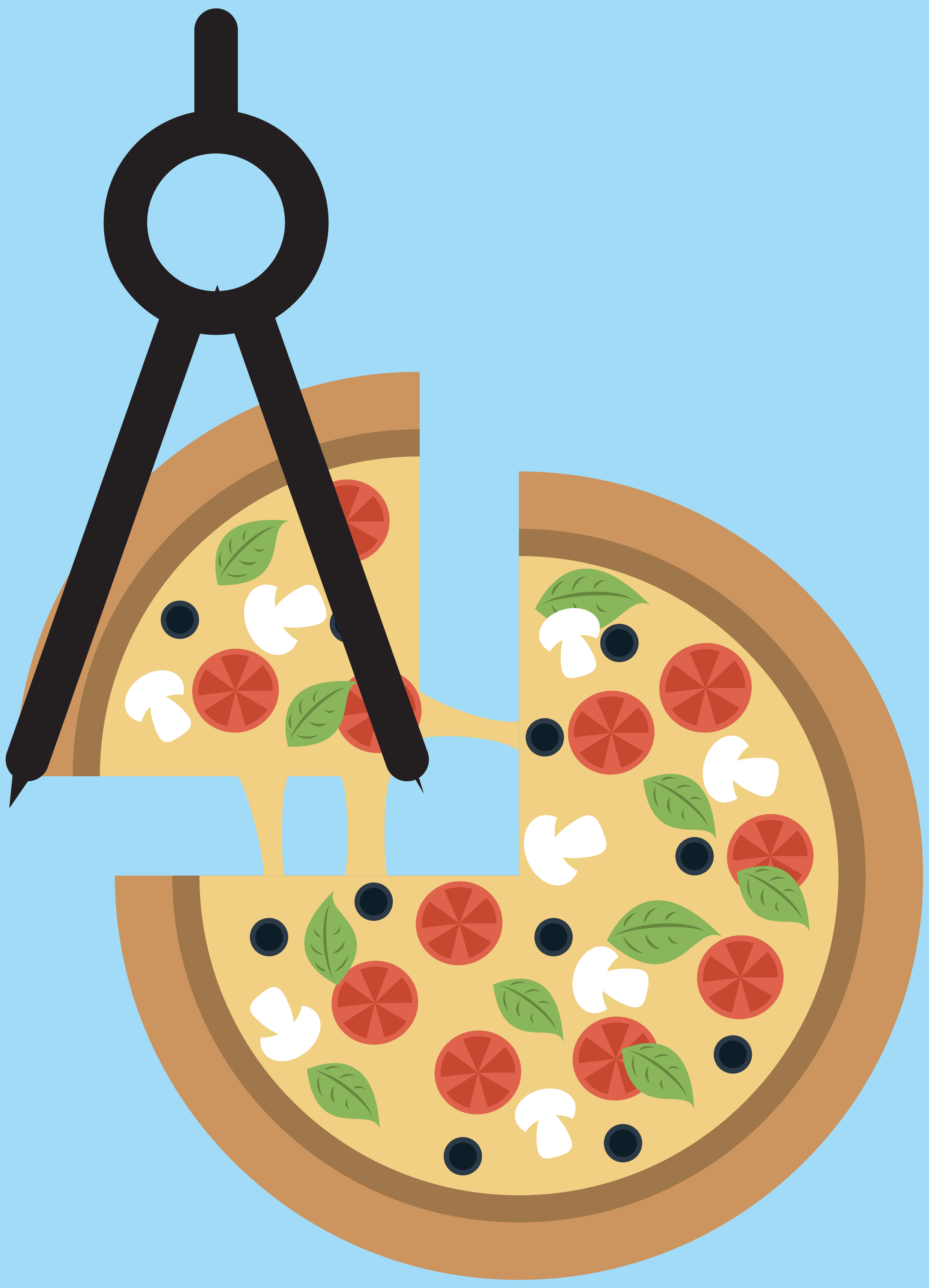
Encore un dimanche sous la pluie ! Lundi, on avait annoncé du grand beau temps pour toute la semaine. Pourquoi est-il si difficile de faire des prévisions météorologiques ?

Pour prévoir la météo, il faut d'abord mesurer les conditions atmosphériques à un instant donné, par exemple les températures et la vitesse du vent. Puis il faut calculer l'évolution de ce système grâce aux équations de la mécanique des fluides.

Mais les mesures des conditions initiales ont une précision limitée. Et les équations décrivant l'atmosphère amplifient la moindre différence dans ces conditions initiales, pour aboutir à des situations complètement différentes sur le long terme.

De tels systèmes, qui existent aussi en astronomie, en économie, en biologie, sont « chaotiques » : même avec des équations parfaitement connues, il est impossible de faire des prévisions précises dans un avenir lointain !

On dit parfois que le battement d'ailes d'un papillon amazonien peut déclencher un mois plus tard une tornade au Texas. Malgré cet « effet papillon », les systèmes chaotiques ont des régularités de comportement subtiles identifiées par les mathématiciens.



Quadrature

Comment couper un morceau de pizza en trois parts égales ?

Les géomètres ont toujours travaillé avec la règle et le compas. Ces deux instruments sont-ils suffisants pour réaliser toutes les figures imaginables ? Certaines constructions semblent particulièrement difficiles : construire un cercle ayant la même aire qu'un carré donné (c'est le célèbre problème de la quadrature du cercle), ou encore diviser un angle en trois parts égales. Depuis le XIX^{e} siècle, on sait que la trisection de l'angle et la quadrature du cercle sont en fait irréalisables avec une règle non graduée et un compas.

Pour montrer ces résultats, les mathématiciens se sont intéressés à un ensemble de nombres : les longueurs des segments constructibles à la règle et au compas. Ils ont montré que ces nombres possédaient certaines propriétés algébriques que n'ont pas le nombre π ou le cosinus de certains angles.

{ *Il existe d'autres outils géométriques que la règle et le compas. En pliant une feuille par origami, on peut diviser un angle en trois. Mais la quadrature du cercle reste impossible à réaliser : elle est liée aux remarquables propriétés du nombre π...* }

Répétition

Mon digicode ne possède que deux touches, A et B, et le code ne fait que 3 lettres. Malheureusement, je l'ai oublié. Comment le retrouver au plus vite ?

On peut évidemment taper l'un après l'autre tous les mots de 3 lettres : AAA, AAB, ABA... Il y a alors 8 mots de 3 lettres, soit 24 lettres à écrire. Toutefois, en tapant AAABABBBAA, la porte s'ouvrira forcément. En effet, cette suite de 10 lettres seulement contient tous les mots de 3 lettres formés avec des A et des B, et aucun mot de 3 lettres ne se répète : une telle suite s'appelle une suite de de Bruijn.

Pour un digicode usuel à 10 touches et avec un code de 4 chiffres, la suite de de Bruijn contient plus de 10000 chiffres. Mieux vaut avoir une bonne mémoire !

La combinatoire de mots est une branche des mathématiques étudiant les suites de lettres d'un alphabet abstrait. Pour les applications en génétique, cet alphabet sera formé des bases ACGT constituant l'ADN, tandis qu'en informatique, les lettres correspondront à des bits.

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr

Les Maths de A à Z

Stabilisation

Si je place une canne à la verticale dans ma main, elle tombera. Pourtant, avec un peu d'entraînement, je peux réussir à la maintenir en équilibre en bougeant ma main.

Des problèmes analogues se posent dans de nombreux domaines, allant de l'écologie à l'aérospatiale. Est-il possible, en introduisant de manière contrôlée une espèce dans un écosystème, de modifier le nombre d'individus des autres espèces de la manière souhaitée ? Si l'un des moteurs d'un satellite tombe en panne, sera-t-il toujours possible de guider le satellite ?

On parle de problèmes de contrôle : je ne peux contrôler qu'un paramètre (la position de ma main), qui influence l'évolution de tout le système (la position de la canne). Les mathématiciens cherchent des critères pour qu'un système soit contrôlable, c'est à dire pour qu'il soit possible d'aller de n'importe quelle configuration initiale à n'importe quelle configuration finale en modifiant le paramètre de manière adéquate.

Guider un satellite d'un point à un autre, c'est bien ; le faire en utilisant le moins de carburant possible, c'est mieux. Pour résoudre ce problème, on peut calculer toutes les trajectoires possibles, mais c'est long. La théorie du contrôle essaie plutôt de déterminer a priori la forme des trajectoires optimales.

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr

Trous

La vapeur surchauffée est pressée contre la poudre de café. Elle se glisse dans un interstice entre deux grains, puis un autre… et finit par ressortir de l'autre côté, chargée de délicieux arômes. Une tasse est prête sous le percolateur.

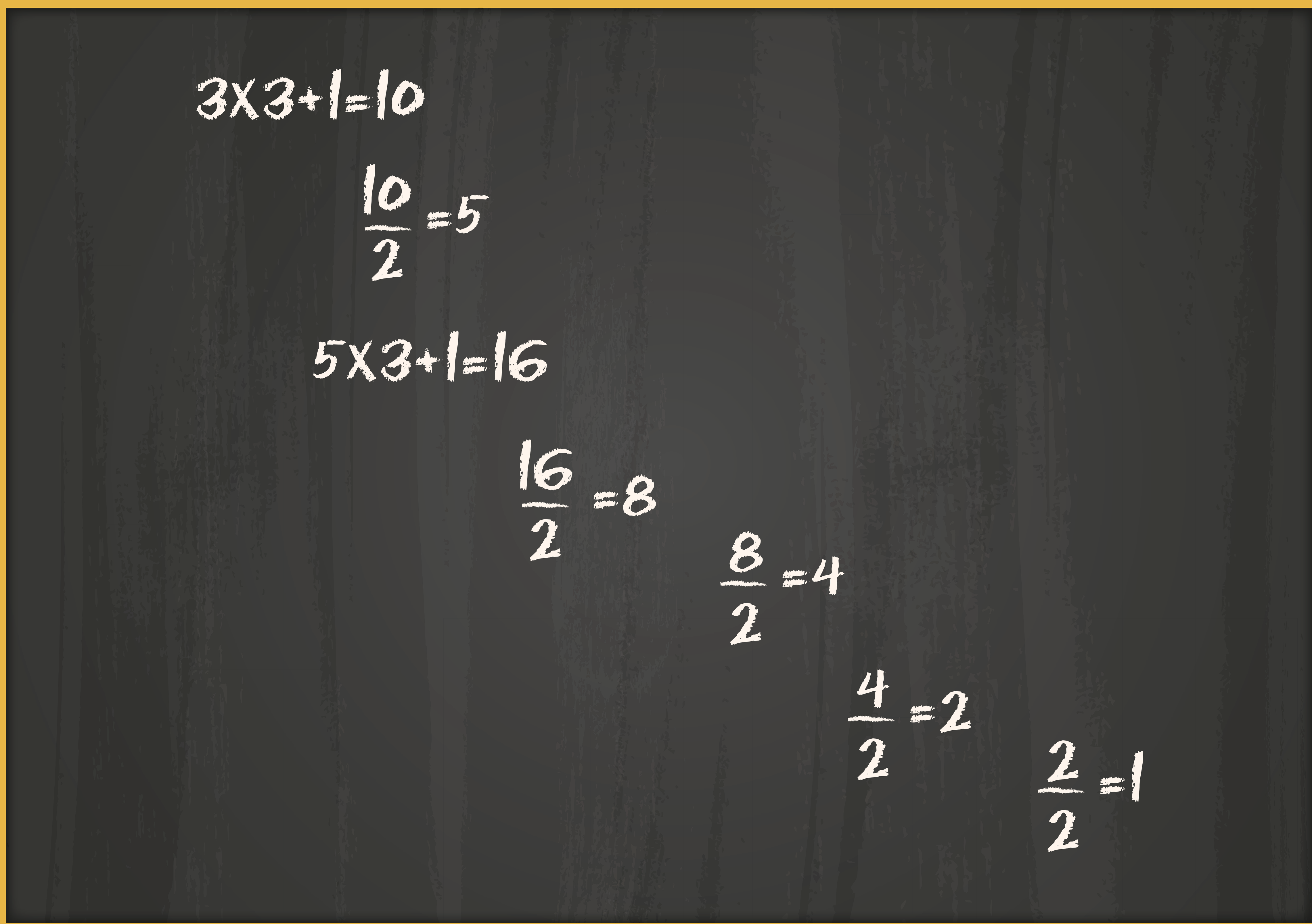
Sous terre, une percolation peut se produire quand de l'eau tente de traverser une roche poreuse. Si les pores sont peu nombreux, la roche est imperméable. Quand le nombre de pores augmente, certains se rejoignent pour former de petits canaux. Avec davantage de pores, les canaux se connectent et l'eau traverse la roche de part en part.

Une petite variation de la densité de pores peut donc avoir un effet considérable si elle se produit au voisinage d'un certain seuil, rendant perméable une roche imperméable.

Calculer cette « densité critique » et comprendre les phénomènes à son voisinage est un problème important mais difficile.

La théorie de la percolation intéresse aussi les forestiers ! Si la densité des arbres dans une forêt est élevée, les incendies se propagent facilement sur de grandes distances, alors que dans une forêt moins dense ils restent plus localisés.

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr



Un

Un petit jeu de calcul tient les mathématiciens en haleine depuis son invention dans les années 1930.

Choisissez un nombre entier positif. S'il est pair, divisez-le par deux. S'il est impair, multipliez-le par trois, puis ajoutez un. Recommencez alors à partir du nombre obtenu.

Par exemple, partons de trois. Il est impair, on le multiplie donc par trois et on ajoute un. On obtient dix, qui est pair, on le divise donc par deux. On obtient au final la suite : 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

À partir de là, le cycle 4, 2, 1 se répète indéfiniment.

Les mathématiciens pensent qu'en partant de n'importe quel nombre, on finit toujours par arriver à un. Cependant, personne ne sait démontrer ce résultat, appelé « conjecture de Syracuse ».

{ *La théorie des nombres regorge de tels problèmes dont l'énoncé est très simple, mais la preuve encore inconnue : par exemple, la conjecture de Goldbach, qui affirme que tout nombre pair peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers.* }

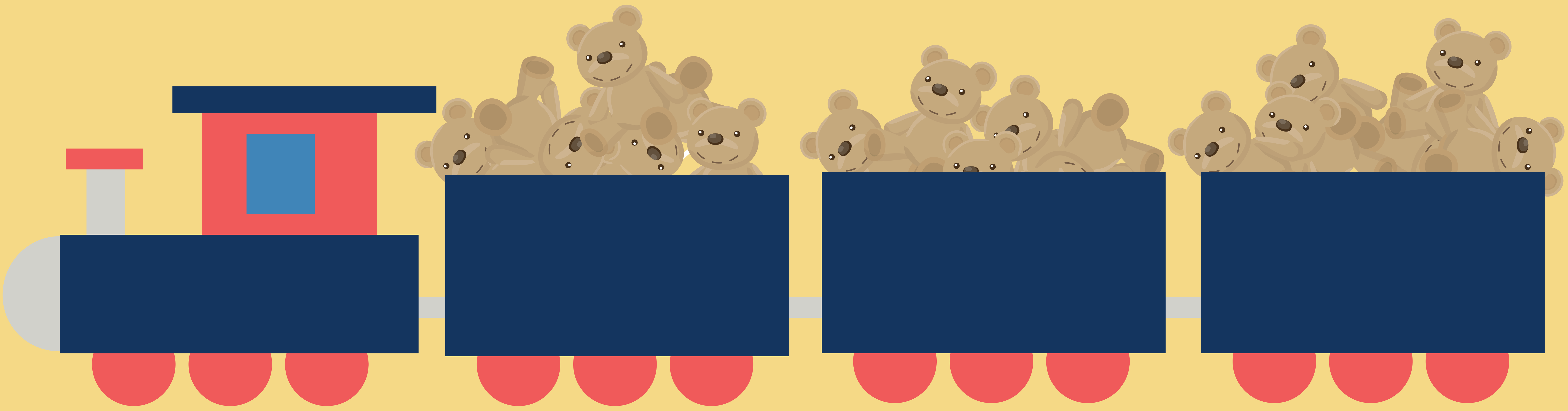
Vague

L'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion, les vagues s'abattant sur la plage, les ricochets… Tous ces phénomènes sont traditionnellement modélisés par l'équation centrale de la mécanique des fluides, l'équation de Navier-Stokes.

Cette équation décrit comment évolue au cours du temps la vitesse en tout point d'un fluide. Comme souvent pour les équations venant de la physique, il n'existe pas de formule explicite décrivant les solutions de l'équation de Navier-Stokes.

Cette équation décrit très bien de nombreux phénomènes physiques ; pourtant, elle admet peut-être des solutions invraisemblables. Par exemple, si on part d'un fluide assez agité, comme une mer houleuse, les mathématiciens ignorent si l'équation autorise que le fluide s'agite de plus en plus et qu'au bout d'un temps fini, certaines parties du fluide aient une vitesse infinie… Un phénomène évidemment jamais observé dans la nature !

{ *La principale difficulté dans l'équation de Navier-Stokes vient du phénomène de turbulence, encore mal compris : dans un fluide agité, des tourbillons peuvent se former à toutes les échelles.* }



Wagon

Une entreprise produit des ours en peluche, et doit les envoyer dans plusieurs magasins par wagon. Quelle est la meilleure manière de les répartir ?

En fait, tout dépend du paramètre que l'on souhaite optimiser. Veut-on minimiser la distance moyenne parcourue par l'ensemble des wagons, ou bien faire en sorte qu'aucun wagon ne roule très longtemps ? L'objectif du transport optimal est d'étudier s'il existe une unique manière optimale de transporter ces peluches, ainsi que de comprendre les propriétés de la solution optimale.

En plus de la logistique, le transport optimal a des applications plus fondamentales, comme l' « inégalité isopérimétrique ». Celle-ci affirme que parmi toutes les surfaces de périmètre donné, le disque est celui dont l'aire est la plus grande. Si cette inégalité est connue depuis des siècles, le transport optimal a permis d'en donner une nouvelle preuve, et d'en découvrir de nombreuses variantes.

Le transport apporte également un éclairage nouveau à la mécanique des fluides. En effet, les particules d'un fluide incompressible se déplacent en minimisant une quantité appelée l'action, ce qui peut être vu comme un problème de transport optimal.

Les Maths de A à Z

Xylophone

Peut-on entendre la forme d'un xylophone ?

La vibration d'un objet, comme un instrument de musique, est caractérisée par une suite de nombres, appelée son spectre. Le premier de ces nombres donne la note que l'on joue : do, ré, mi... Les nombres suivants donnent le timbre : c'est ce qui fait la différence entre un do joué sur un violon ou sur une flûte.

Depuis un siècle, les mathématiciens se demandent si on peut retrouver la forme d'un objet à partir de son spectre. La réponse est... presque. Le spectre nous renseigne sur de nombreuses propriétés d'un objet (volume, périmètre...), mais il peut exister deux objets différents ayant le même spectre.

Mesurer les vibrations d'un objet permet aussi de trouver des fissures. De quoi détecter un défaut de fabrication dans un objet manufacturé... ou découvrir un puits de pétrole dans un champ !

C'est par la mesure des vibrations de la Terre lors de séismes qu'on a pu connaître sa structure interne : graine solide, noyau liquide, manteau plastique...

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr

Yes or No

Doit-on toujours croire son livre de maths ?

« Considérons une droite et un point n'appartenant pas à cette droite. Alors il existe une unique parallèle à cette droite passant par ce point. » Cette loi géométrique semble évidente. Tellement évidente qu'Euclide en a fait un axiome, c'est-à-dire l'une des propositions de base à partir desquelles on peut prouver tous les théorèmes géométriques.

Pourtant, les mathématiciens ont cherché pendant des millénaires à prouver cet axiome des parallèles à partir des autres axiomes d'Euclide. Tout cela pour arriver à ce résultat surprenant : une géométrie où l'axiome des parallèles est faux est tout aussi cohérente qu'une géométrie où cet axiome est vrai.

En somme, adopter un axiome ou non est parfois une question de convention. Yes, no... faites votre choix !

En 1931, Kurt Gödel a prouvé un résultat dit « d'incomplétude » : pour l'arithmétique, quel que soit le système d'axiomes choisi, il existera toujours une infinité de résultats que l'on ne peut ni prouver, ni infirmer.

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr

Les Maths de A à Z

Zigzag

À l'issue d'une soirée bien arrosée, Jack quitte son bar favori pour rentrer chez lui.
C'est le début d'une longue errance dans New York...

Jack a tellement bu qu'à chaque carrefour, il prend n'importe quelle rue au hasard, quitte parfois à rebrousser chemin. Rentrera-t-il chez lui ? Oui, de façon quasiment certaine !

Les mathématiciens décrivent l'errance alcoolisée de Jack comme une marche aléatoire. Dans des espaces à une dimension (une rue) ou à deux dimensions (New York), Jack atteindra toujours son objectif... parfois après un temps très long ! Mais à trois dimensions, il n'a qu'une chance sur trois de rentrer à la maison...

On peut se promener ainsi dans des espaces plus abstraits. Les réseaux sociaux utilisent ces marches aléatoires pour vous suggérer de nouveaux contacts proches de vos centres d'intérêts !

{ *Les marches aléatoires peuvent servir à modéliser de nombreux phénomènes : les cours de la bourse, l'agitation des molécules dans un gaz ou un liquide, les populations animales d'un écosystème, le fonctionnement des neurones...* }

Centre de Vulgarisation de la Connaissance
www.cvc.u-psud.fr