Les mathématiques, entre compréhension du réel et construction du possible

Introduction

Les mathématiques ont quelque chose de paradoxal. D'un côté, elles étudient des objets abstraits : pour ne prendre que l'exemple de la géométrie euclidienne, nous ne trouvons ni droite infiniment longue, ni point infiniment petit et localisé dans les objets concrets. Ce problème est très général car, comme nous le verrons, la notion d'infini semble se cacher à peu près partout en mathématiques. D'un autre côté, les mathématiques jouent un rôle essentiel dans toutes les sciences de la nature, et permettent des prédictions concrètes concernant le réel. L'exemple de la découverte de Neptune est sans doute l'un des plus frappants. En observant la trajectoire d'Uranus, l'astronome et mathématicien Le Verrier remarqua certaines irrégularités. Il en déduisit qu'il devait exister une autre planète dans le système solaire. En 1846, Le Verrier réussit par de savants calculs à déduire la position et la masse de la nouvelle planète. Quelques jours après que ces résultats ont été déposés à l'Académie des Sciences, l'astronome Johann Galle pointa son télescope dans la direction annoncée par Le Verrier, et observa effectivement une nouvelle planète.

Pour lever ce paradoxe apparent, nous nous proposons de clarifier le rôle joué par les mathématiques au sein de la science : il nous faut comprendre ce qui se cache derrière les « savants calculs » évoqués ci-dessus. Nous distinguerons trois niveaux d'utilisation des mathématiques dans les sciences, correspondant à ce que nous appellerons les relations numériques, les modèles mathématiques, et les lois paradigmatiques. Nous nous intéresserons tout particulièrement au sens que peuvent avoir les résultats mathématiques dans ces différents niveaux épistémologiques, et en particulier au sens à donner aux résultats se référant à l'infini. Nous essayerons de montrer que c'est cette question de l'infini qui détermine l'applicabilité des mathématiques aux sciences de la nature.

I) Les relations numériques

Le niveau le plus commun d'utilisation des mathématiques est l'usage de ce que j'appellerai des relations numériques. Une relation numérique est une manière de calculer la valeur d'une quantité réelle à partir de la valeur d'une autre quantité réelle. De telles relations se retrouvent aussi bien dans les sciences naturelles que dans les sciences humaines. Donnons quelques exemples pour illustrer cette notion.

(1) En mécanique, la loi de la chute des corps sur terre. Si je lâche un objet sans lui donner d'impulsion, après s secondes, il sera descendu de $5s^2$ mètres.
(2) En optique, les lois de Snell-Descartes, décrivent le lien entre l'angle d'incidence et l'angle de réfraction[1] d'un rayon lumineux passant dans l'air puis dans l'eau (par exemple)
(3) En économie, la courbe de Phillips donne la corrélation entre le taux de chômage et l'inflation.
(4) En dynamique des populations, la loi de Malthus affirme que la population croit exponentiellement avec le temps.

Une manière simple d'obtenir une telle relation est de réaliser des mesures des quantités en jeu, de les placer dans un graphique, et de remarquer que la courbe obtenue correspond à une fonction bien connue (une parabole dans (1), un sinus dans (2), une exponentielle dans (4)...). Je peux ensuite réaliser autant d'expériences que je le souhaite, afin de vérifier que leurs résultats concordent bien avec la relation intuitée. Cependant, je ne peux pas prouver qu'une relation numérique est correcte par l'expérience. En effet, comme l'a remarqué Hume[2], même si mes prédictions sont exactes pour les 100 premières expériences que je fais, rien ne me permet d'affirmer que la 101ème expérience coïncidera bien avec mes prévisions. Pour prouver expérimentalement une loi numérique, il me faudrait réaliser une infinité d'expériences ; la loi serait alors purement synthétique, et ne m'apprendrait rien sur le réel.

Toutefois, le fait qu'une loi scientifique ne puisse pas être prouvée n'est pas nécessairement une

---

1 La réfraction est le fait qu'un rayon lumineux soit dévié quand il change de milieu.
2 D. Hume, *Enquête sur l'entendement humain,* GF Flammarion, 1748 (édition 1983).

faiblesse de la science. Pour Popper[3], cette falsifiabilité est justement le critère de la scientificité d'une discipline. La science ne procède pas en gravant ses lois dans le marbre, mais en les améliorant au fur et à mesure. Si une relation numérique est contredite par une expérience, il me faut trouver une nouvelle loi qui prendra en compte tous les résultats mesurés expérimentalement, et que l'on peut alors considérer comme étant plus exacte (ou moins fausse).

Lorsque le scientifique utilise les relations numériques pour les confronter à l'expérience, il fait appel au langage mathématique, mais pas au raisonnement mathématique. Pour utiliser une relation numérique, j'ai simplement à effectuer un calcul, et non à manipuler des concepts abstraits.
Au contraire, les mathématiques jouent un rôle beaucoup plus intéressant pour essayer de justifier des relations numériques, à partir de considérations plus générales.

2) Les modèles mathématiques

Un exemple de modèle mathématique

Un modèle mathématique est une manière d'obtenir des relations numériques à partir de considérations assez générales, et d'un certain nombre d'approximations. Pour illustrer ce que nous entendons par là, nous donnerons un exemple tiré de la dynamique des populations.

Étudions la population d'une espèce dans un lieu, et notons u_n le nombre d'individus présents l'année n dans ce lieu. Nous voulons obtenir une relation numérique décrivant l'évolution de u_n. Pour cela, partons de l'équation générale suivante liant la population de l'année n à la suivante.

$$u_{n+1}-u_n = \text{nombre d'individus apparus entre l'année } n \text{ et l'année } n+1$$
$$- \text{nombre d'individus disparus entre l'année } n \text{ et l'année } n+1 .$$

Il existe plusieurs manières pour un individu de disparaître ou d'apparaître : ils peuvent bien entendu naître et mourir, mais aussi migrer. Négligeons les phénomènes migratoires ; nous pouvons alors réécrire l'équation ci-dessus comme :

$$u_{n+1}-u_n = \text{nombre d'individus nés entre l'année } n \text{ et l'année } n+1$$
$$- \text{nombre d'individus morts entre l'année } n \text{ et l'année } n+1 .$$

Le nombre d'individus naissant entre l'année n et l'année $n+1$ dépend bien entendu du nombre d'individus vivants l'année n : plus il y a d'individus, plus ils auront d'enfants. Mais il peut aussi dépendre de la population d'autres espèces : s'il y a de nombreuses proies pour nourrir l'espèce considérée, elle se multipliera sans doute plus vite que s'il y en a peu. Le nombre de naissances peut aussi dépendre de l'âge moyen de la population considérée, d'un éventuel déséquilibre entre le nombre d'individus mâle et femelle... De même, le nombre de morts chaque année dépend de nombreux facteurs.

C'est donc une approximation importante que nous ferons en considérant que les nombres de naissances et de morts ne dépendent que de la population l'année n. Nous ferons une dernière approximation en estimant que ces nombres sont proportionnels à u_n. Cela n'est sans doute pas réaliste s'il y a des phénomènes de consanguinité ou de surpeuplement. Nous écrirons néanmoins :

$$\text{nombre d'individus nés entre l'année } u_n \text{ et l'année } u_{n+1} = c_1 u_n ,$$
$$\text{nombre d'individus morts entre l'année } u_n \text{ et l'année } u_{n+1} = c_2 u_n ,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes.

Finalement, en injectant ces relations dans l'équation initiale, on peut écrire :

$$u_{n+1}-u_n=(c_1-c_2)u_n .$$

A partir de là, par un raisonnement mathématique simple appelé récurrence, on peut retrouver la loi de Malthus : si $c_1>c_2$, la population croit exponentiellement ; si $c_1<c_2$, elle décroit exponentiellement.

Un modèle permet donc de trouver des relations numériques ; mais il a l'avantage de nous donner en plus les conditions dans lesquelles ces relations numériques seront valables. En regardant

3 Cf, par exemple K.R. Popper, *La logique de la découverte scientifique*, Payot, 1935 (édition 1984)

la suite des approximations que nous avons faites précédemment, nous pouvons déduire que la loi de Malthus sera valable si les phénomènes de migrations, de surpeuplement, etc... sont suffisamment faibles pour être négligés. Si la loi de Malthus est contraire aux expériences, c'est que ces phénomènes ne peuvent pas être négligés. On peut alors élaborer un modèle plus complexe, prenant en compte plus de paramètres.

Remarquons toutefois que l'objectif de la science est de trouver les modèles les plus simples possibles à partir desquels ont peut déduire des relations numériques en accord avec les expériences. Il n'est pas souhaitable d'élaborer des modèles trop complexes pour plusieurs raisons. Tout d'abord, aussi complexe et précis que soit un modèle, il ne sera jamais une représentation parfaitement fidèle de la réalité, mais seulement une approximation : par exemple, lorsque je calcule le mouvement d'une planète en astronomie, je suis obligé de ne retenir que les principales forces d'attraction s'appliquant sur cette planète (celles exercées par les étoiles et les planètes les plus proches et les plus massives), et de négliger les forces exercées par des corps lointains et peu massifs. Ensuite, un modèle trop complexe peut engendrer des difficultés mathématiques considérables, à telle point que les équations ne peuvent pas être résolues, même de manière numérique. Enfin, même lorsque les équations en jeu peuvent être résolues, il peut y avoir tellement de paramètres que les résultats sont trop compliqués pour comprendre effectivement les phénomènes en jeu.

Les modèles, l'un des moteurs des mathématiques.

Contrairement aux simples relations numériques, les modèles peuvent faire appel à des domaines des mathématiques très divers et d'actualité. Selon que que le modèle soit probabiliste ou déterministe[4], à une ou plusieurs variables, elles mêmes discrètes ou continues, les méthodes mathématiques employées seront celles des équations stochastiques, des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, des systèmes dynamiques...

L'étude des modèles issus des sciences a été l'un des moteurs de ces domaines des mathématiques. Par exemple, l'étude des équations de la mécanique céleste a intéressé plusieurs des meilleurs mathématiciens du XVIIIème et du XIXème siècles (Euler, Laplace, Lagrange, Gauss...). En cherchant de nouvelles méthodes pour étudier les problèmes astronomiques (formulation variationnelle, développements en séries...), ceux-ci ont fait progresser tout le champ des équations aux dérivées partielles.

Remarquons toutefois que d'autres domaines des mathématiques se sont développés indépendamment des modèles scientifiques. La géométrie non-euclidienne, par exemple, ne correspondait à aucun modèle scientifique lors de son invention. Ce n'est que plus tard qu'elle a fait partie intégrante d'un paradigme physique, comme nous le verrons par la suite.

Les résultats mathématiques ont-ils tous un sens ?

Il nous faut aussi remarquer que, même lorsqu'ils s'intéressent à des équations issues de modèles, les mathématiciens se posent des questions assez différentes de celles des autres scientifiques. Si, au XVIIIème ou au XIXème siècles, les mathématiciens cherchaient à résoudre explicitement les équations données par les modèles, et donc à obtenir des relations numériques, les mathématiciens d'aujourd'hui se concentrent davantage sur des questions d'ordre qualitatif que sur les problèmes quantitatifs.

L'une des raisons à cela est que les solutions de certaines équations ne peuvent pas être écrites à partir des fonctions usuelles auxquelles nous sommes habitués, et nous n'avons donc pas d'expression « explicite » pour la solution à notre problème. Au contraire, il est souvent possible grâce à un ordinateur de résoudre les équations qui nous intéressent de façon approchée, mais suffisamment précise pour toutes les applications.

Le mathématicien « pur » en est donc réduit à étudier les propriétés qualitatives des solutions de son problème. Reprenons l'exemple provenant de la dynamique des populations que nous avons

---

4 C'est à dire selon que la situation à un instant donné détermine l'évolution future du système, ou que des éléments aléatoires soient pris en compte.

étudié plus haut. Imaginons que nous ajoutions plusieurs paramètres au modèle, afin de décrire davantage de phénomènes. Si le modèle est suffisamment compliqué, il risque de ne pas y avoir d'expression explicite pour la solution de mon équation. Néanmoins, je peux essayer de trouver des informations qualitatives sur la solution de mon équation. Par exemple, je peux me demander si la suite u_n est bornée. Cela signifie qu'il existe un certain nombre A tel que le nombre d'individus est toujours plus petit que A. Autrement dit, $\forall n, u_n < A$.

Il est tout à fait possible d'obtenir une telle propriété, même sans avoir d'expression explicite pour la solution u_n de mon équation. Typiquement, la preuve d'une telle assertion se ferait par l'absurde : je supposerais qu'il n'existe pas de tel A, et j'en déduirais une contradiction. Cette propriété ne donne donc pas la valeur de A. Par conséquent, il n'est pas possible de tester, pour un n particulier, si $u_n < A$. Cette propriété concerne l'ensemble de toutes les valeurs prises par ma solution, et pas les valeurs particulières prises chaque année. Ce résultat n'a un sens que si j'effectue un nombre infini de mesures, en attendant un temps infini : non seulement un nombre fini d'expériences ne permet pas de prouver ce résultat (mais nous avons vu que c'était aussi le cas des relations numériques), mais il ne permet même pas de le falsifier. On peut alors légitimement se demander si un tel résultat qualitatif a un sens, puisqu'il semble n'avoir rien à voir avec l'expérience.

Or une grande partie des résultats qualitatifs donnés par les mathématiques sur les équations issues de modèles ressemblent à celui que nous venons de présenter, et font appel à l'infini. Par exemple, toutes les questions de régularité de fonctions qui sont au cœur de l'analyse mathématique nécessiteraient, pour être vérifiées ou falsifiées expérimentalement, une infinité de mesures.

Il pourrait alors sembler qu'une bonne partie des mathématiques pures n'a aucun sens, à cause du recours permanent qu'elle fait à l'infini. Il faudrait donc faire un tri rigoureux dans les mathématiques, pour séparer les résultats porteurs de sens de ceux purement métaphysiques. C'est plus ou moins ce qu'a proposé le mathématicien hollandais Brouwer, et l'école dite intuitionniste qui l'a suivi. Il considère que, lorsque je dis qu'il existe un A tel que pour tout n, $u_n < A$, ce résultat n'a de sens que si je peux construire effectivement un A ayant cette propriété. Or nous avons expliqué que, par un raisonnement par l'absurde, il était parfois possible d'affirmer qu'il existait un tel A, sans être pour autant capable de préciser sa valeur numérique. Si je veux que tous les résultats mathématiques aient un sens, il me faut donc m'interdire le recours au raisonnement par l'absurde. Autrement dit, je n'ai pas le droit de faire appel au tiers exclu : en logique intuitionniste, je ne peux pas faire appel à l'axiome affirmant que, pour toute proposition logique P, soit P est vraie, soit non-P est vraie.

Renoncer aux preuves par l'absurde demanderait d'abandonner de nombreuses branches des mathématiques. Avant de décider si une telle séparation est vraiment nécessaire, examinons le troisième emploi que la science fait des mathématiques.

3) Les lois paradigmatiques

Qu'est-ce qu'une loi paradigmatique ?

Dans l'exemple de modèle de dynamique des populations que nous avons présenté ci-dessus, nous avons dû prendre pour point de départ une équation initiale, à savoir que le nombre d'individus évoluait car certains apparaissaient, et d'autres disparaissaient ; ce qui semble assez évident. Dans d'autres sciences que la dynamique des populations, et en particulier en physique théorique, l'équation de base servant à dériver différents modèles est beaucoup moins intuitive. Le meilleur exemple d'une telle équation est sans doute la relation fondamentale de la dynamique : l'accélération d'un corps, que multiplie sa masse, est égale à la somme des forces s'exerçant sur ce corps. Autrement dit :

$$m\vec{a} = \sum \vec{f} \quad .$$

Il nous faut reconnaître que cette loi, énoncée pour la première fois par Newton, n'a rien d'évident. Même si nous estimons savoir ce qu'est l'accélération (quantité qui n'est certainement pas facile à mesurer, découlant d'un concept mathématique compliqué), même si nous pensons pouvoir donner une définition de la masse d'un corps[5], cette équation ne nous apprend (presque) rien si nous n'avons pas d'expression pour les différentes forces s'appliquant au corps en question. Telle quelle, la loi de Newton est trop générale pour qu'on puisse en déduire des relations numériques. Elle est tellement générale que certains physiciens, comme Kirchhoff, l'ont considérée comme une définition davantage que comme une loi. Nous qualifierons une telle loi de paradigmatique. Elle ne nous informe pas sur un problème de mécanique particulier, mais définit quelle est la manière de traiter un problème de mécanique : je dois trouver un modèle décrivant les forces entre les différents corps en jeu, puis résoudre les équations découlant de la relation fondamentale de la dynamique.

Une loi paradigmatique est invérifiable, et à peu près infalsifiable. Si, dans un problème de dynamique, je trouve des relations numériques contraires à l'expérience, je peux en général l'expliquer en disant que l'expression que j'ai prise pour décrire les forces en jeu est fausse. Si la loi de Newton a fini par être remise en question, ce n'est pas parce qu'elle prédisait des résultats faux mais parce qu'elle n'avait de sens que si une certaine conception de l'espace et du temps était correcte. C'est cette conception de l'espace et du temps, bien plus que la loi de Newton elle même, que la relativité restreinte a remise en cause.

Prenons comme autre exemple ce principe fondamental de la mécanique quantique : « tout état physique est représentable par un vecteur dans un espace de Hilbert[6] ». Jamais un tel postulat ne pourra être réfuté, car son énoncé est plus proche de la métaphysique que de l'expérience. C'est pourquoi l'analyse épistémologique de Popper en terme de falsifiabilité s'applique mal aux lois paradigmatiques. L'apparition et l'évolution des paradigmes semble beaucoup mieux décrite par l'approche de Kuhn (auquel j'emprunte le mot de paradigme) présentée dans *La structure des révolutions scientifiques*[7] *:* un paradigme est une vision cohérente du monde, un ensemble de croyances communes aux scientifiques d'une discipline, et de méthodes permettant de traiter les problèmes de cette discipline. Un paradigme ne disparaît pas car il prédit des résultats faux, mais car il a du mal à expliquer certaines expériences : il y a alors une situation de crise, jusqu'à ce qu'un nouveau paradigme mette d'accord une majorité de scientifiques.

Mathématiques et paradigmes

L'approche de la science en terme de paradigme permet de justifier l'étude de tous les objets mathématiques : même si une branche des mathématiques semble s'intéresser à des problèmes ne provenant pas de modèles, elle peut servir de formalisme pour exprimer un paradigme futur, et être donc essentielle au développement de la science. Ce fut le cas de la géométrie non-euclidienne, qui servit à exprimer le paradigme de la relativité générale un demi-siècle après son invention. L'approche en terme de paradigme permet également de repenser le problème de l'infini que nous avons expliqué dans la partie précédente.

Nous avons vu que, à partir de modèles, le mathématicien pouvait affirmer des résultats ne pouvant ni être vérifiés, ni falsifiés expérimentalement. Ces résultats nécessiteraient une infinité de mesures physiques pour avoir du sens et, suivant Brouwer, nous avons suggéré de les écarter des mathématiques, en ne faisant plus appel au principe du tiers exclu.

Cependant, les paradigmes exprimés sous forme mathématiques que nous avons présentés ci-dessus font appel à l'infini. Pour exprimer la loi de Newton, il me faut considérer la dérivée seconde de la position d'une particule. Or la définition d'une dérivée fait appel à l'infini : il me faut regarder les variations de la vitesse sur des temps de plus en plus courts, et je n'obtiens l'accélération qu'à la limite, lorsque je considère des temps « infiniment courts ». Il me faudrait faire une infinité de mesures pour obtenir effectivement la dérivée d'une quantité.

Les postulats de la mécanique quantique font appel à la notion de probabilité. Or celle-ci provient également de la notion d'infini. Dire que la probabilité qu'une pièce tombe sur pile est ½,

---

5 Ce qui n'a rien de trivial ! Pour un aperçu des difficultés liées à une telle définition, voir par exemple H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, chapitre 6, Flammarion, 1902 (édition 1968)

6 Pour faire simple, disons qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel de dimension infini, dans lequel on peut définir la longueur d'un vecteur, et l'angle entre deux vecteurs.

7 T. Kuhn, La structure des révolutions scientifiques, Flammarion, 1962 (2ème édition 1983)

c'est dire que si je réalise N lancers de pièce, le nombre de fois que j'obtiens pile divisé par N tend vers ½. Là encore, c'est un résultat que je ne peux pas établir en réalisant un nombre fini de lancers : il me faut faire une infinité d'expériences pour obtenir effectivement une probabilité.

Évidemment, on pourrait dire qu'après N lancers, pour un N fixé mais très grand, si j'obtiens environ autant de pile que de face, alors il est très probable (et on peut associer une valeur à cette probabilité) que la pièce ne soit pas truquée, et que la probabilité d'obtenir pile soit ½. Ceci permet en pratique de déterminer si une pièce est truquée ou non. Mais ceci ne permet pas de définir ce qu'est une une probabilité, puisque la définition serait alors circulaire.

L'infini semble se retrouver dans tous les postulats de la physique théorique. Cela signifie-t-il que cette dernière est incapable de nous renseigner sur ce qu'est la réalité ? Il conviendrait plutôt de dire que l'infini se cache dans la notion même de réalité. Ainsi, comme l'explique Husserl[8] :
« L'objet réel appartenant au monde – et, à plus forte raison, le monde lui-même, – est une idée infinie, se rapportant à des infinités d'expériences concordantes ».

Ainsi, une loi fondamentale de la physique, en tant qu'énoncé sur la nature du monde, se rapporte nécessairement à une infinité d'expériences potentielles. Ce que font les paradigmes exprimés en termes mathématiques, c'est structurer cet infini. Une suite de mesures de la distance parcourue par un objet pendant des temps de plus en plus courts ne sera pas n'importe quelle infinité d'expériences, ce sera une suite de mesures convergeant vers la vitesse de mon objet.

Les objets mathématiques, liés à la notion d'infini, ne sont pas des outils abstraits que les différentes sciences peuvent utiliser à loisir. Ils sont le matériau avec lequel je peux construire une vision structurée du réel. Ainsi, comme le disait Hermann Weyl[9] :
« les concepts mathématiques de nombre, de fonction, etc participent à la construction théorique du monde réel de la même façon que les concepts d'énergie, de gravitation, d'électron, etc. »

Conclusion

Revenons sur le paradoxe que nous avons mentionné en guise d'introduction, à savoir que les mathématiques sont à la fois abstraites et utiles à la compréhension du réel. Notre réponse à ce paradoxe est que les mathématiques sont avant tout la science de l'infini. A cause de cet infini omniprésent dans la discipline, de nombreux résultats exprimés en langage mathématique ne peuvent pas servir à prévoir le résultat d'une expérience, nécessairement finie ; en cela, elles sont abstraites. Mais j'ai besoin de l'infini pour donner un sens à la notion de réalité, comme « infinité d'expériences concordantes ». Les résultats mathématiques de la physique théorique ne nous renseignent pas sur le résultat d'une expérience unique, mais sur l'ensemble de toutes les expériences possibles. Concluons donc sur une nouvelle citation d'Hermann Weyl, qui affirmait que l'essence des mathématiques était « la construction a priori du possible, par contraste à la description a posteriori du donné en acte ».[10]

8 E. Husserl, *Méditations cartésiennes*, §28, Vrin, 1931 (édition 2008).
9 H. Weyl, *Remarques marginales à des problèmes fondamentaux des mathématiques*, section II, *Math. Zeitschrift* 1924.
10 H. Weyl, *Consistency in mathematics*, conférence de mai 1929, The Rice Institut Pamphlet, 16, p. 245-65.