# Théorie spectrale et EDP linéaires

# 1 Introduction

**Exercise 1.** *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Considérons l'équation*

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \lambda u, \tag{1}$$

*où $u \in H^2([0,1])$.*

*1. Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ y a-t-il une solution non-triviale à (1) telle que $u(0) = u(1) = 0$ ?*
*2. Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ y a-t-il une solution non-triviale à (1) telle que $u(0) = u(1)$ et $u'(0) = u'(1)$ ?*
*3. Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ y a-t-il une solution non-triviale à (1) telle que $u(0) = 0$ ?*
*4. Conclusion ?*

**Exercise 2** (L'équatin de la chaleur homogène)**.** *Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. On considère l' équation*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \textit{pour } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{2}$$

***A)*** *Supposons que $u \in C^0([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ vérifie (2).*

***1.*** *Notons par $v$ la transformée de Fourier de $u$ dans les variables spatiales : $v(t,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} u(t,x) \mathrm{d}x$. Montrer que l'on a*

$$v(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} (\mathcal{F}g)(\xi).$$

***2.*** *En déduire que pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \mathrm{d}y \tag{3}$$

***B)*** *Réciproquement, montrer que, si on définit $u$ par (3), alors $u \in C^0([0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ et $u$ vérifie (2).*

# 2 Chapitre 1

## 2.1 Espaces de Sobolev

**Exercise 3.** *Montrer que*

$$H^2(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) | \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

*où $\Delta f$ est compris au ses des distributions.*

## 2.2 Opérateurs compacts

**Exercise 4.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $(K_n)$ une suite d'opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$. Supposons qu'il existe un opérateur borné $K$ sur $\mathcal{H}$ tel que $\|K - K_n\| \longrightarrow 0$. Monter que $K$ est compact.*

*Indice : Utiliser la caractérisation des ensembles précompacts en termes de recouvrement par des boules.*

**Exercise 5.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $K$ un opérateur compact sur $\mathcal{H}$. Montrer qu'il existe une suite $K_n$ d'opérateurs de rang fini sur $\mathcal{H}$ tels que $\|K - K_n\| \longrightarrow 0$.*

*Indication : Couvrir $K(B_{\mathcal{H}})$ par un nombre fini de petites boules, puis considérer les projections sur le centre de chaque boule.*

**Exercise 6** (Opérateurs Hilbert-Schmidt)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $N = N(x,y) \in L^2((X, \mathcal{A}, \mu)^2)$. Considérons l'opérateur $K$ sur $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ donné par*

$$(Kf)(x) = \int N(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y).$$

*Un tel opérateur est dit* Hilbert-Schmidt.

*1. Soit $N_x : y \mapsto N(x,y)$. Pourquoi $N_x$ appartient-il à $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour presque tout $x \in X$ ?*
*2. Vérifier que $K : L^2 \longrightarrow L^2$ est bien défini, et que $\|Kf\|_{L^2} \leq \|N\|_{L^2} f$.*
*3. Monter que l'opérateur $K$ est compact.*
*Indication : utiliser le fait que $Kf(x) = \langle f, \overline{N}_x \rangle$.*

## 2.3 Problèmes elliptiques

**Exercise 7.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné régulier. On veut montrer que l'équation*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3. & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

*admet une solution non-triviale.*

*1. Montrer que le problème*

$$\inf\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \Big| u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega u^4 = 1 \right\} \tag{4}$$

*admet un minimiseur.*

*2. Montrer que, si $u$ est un minimiseur de (4), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $-\Delta u = \lambda u^3$.*

*3. Conclure.*

**Exercise 8** (Conditions de Robin)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné Ã  bord lisse et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Consiérons le problème elliptique*

$$-\Delta u = fu,$$

*avec* conditions au bord de Robin

$$\partial_n u = \alpha u$$

*sur $\partial\Omega$.*

*1. Vérifier qu'une solution faible de cette équation est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ qui vérifie*

$$\int_\Omega f\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} uv \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

*2. Supposons que $\alpha < 0$. Montrer que, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ qui vérifie (5).*

*3. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une suite $\lambda_1^\alpha \leq \lambda_2^\alpha \leq ... \leq \lambda_k^\alpha \leq ...$, et une base orthonormale $(\psi_k^\alpha)_{k\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$, avec $\psi_k^\alpha \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant*

$$\begin{cases} -\Delta \psi_k^\alpha = \lambda_k^\alpha \psi_k^\alpha. & \text{in } \Omega \\ \partial_n \psi_k^\alpha = \alpha \psi_k^\alpha & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

*au sens faible.*

## 2.4 Géométrie spectrale

**Exercise 9.** *(Le théorème nodal de Courant)*
*Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné ayant un bord lisse. On notera $\lambda_k(\Omega)$ la $k$-ième valeur propre du Laplacien $-\Delta$ avec conditions au bord de Dirichlet, et par $(\phi_k)_{k\in N}$ une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres. On rappelle que l'on a*

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{\substack{E_k \subset H_0^1(\Omega) \\ \text{sous- espace de dimension } k}} \max_{v \in E_k, v \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \mathrm{d}x}{\int_\Omega v(x)^2 \mathrm{d}x}. \tag{6}$$

*Pour chaque $k$, notons $\mathcal{D}_k := \{x \in \Omega; \phi_k(x) \neq 0\}$. On notera $N_k$ le nombre de composantes connexes de $\mathcal{D}_k$.*

*1. Supposons que $\lambda_k(\Omega) < \lambda_{k+1}(\Omega)$. Montrer que $N_k \leq k$.*
*Indication : Pour chaque composante connexe $\mathcal{D}_{i,k}$ de $\mathcal{D}_k$, $1 \leq i \leq N_k$, considérer la fonction*

$$\psi_{i,k}(x) = \begin{cases} \phi_k(x) \text{ if } x \in \mathcal{D}_{i,k} \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

*Supposer que $N_k \geq k+1$. En utilisant (6), montrer que $\lambda_{k+1} \leq \lambda_k$.*

*2. En déduire que*

$$N_k \leq \max\{k' \in \mathbb{N}; \lambda_{k'} = \lambda_k\}.$$

*3. Montrer que*

$$N_k = O(\lambda_k^d). \tag{7}$$

*4. Trouver un domaine $\Omega$ et une famille de fonctions propres et de valeurs propres $\phi_k, \lambda_k$ avec $-\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k$ où $\lambda_k \longrightarrow \infty$ telles que*

$$N_k = o(\lambda_k^d). \tag{8}$$

## 3 Chapitre 2

**Exercise 10.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, et soit $T$ un opérateur auto-adjoint injectif sur $\mathcal{H}$. Montrer que $T^{-1}$ est aussi auto-adjoint.*

**Exercise 11.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, et soient $A, B$ des opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$. Supposons que $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$ et que $Av = Bv$ pour tout $v \in \mathcal{D}(B)$. Montrer que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.*

**Exercise 12.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, et soit $A$ un opérateur continu sur $\mathcal{H}$. Si $B$ est un opérateur sur $\mathcal{H}$, on définit $A + B$ comme l'opérateur tel que $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(B)$, et $(A+B)v = Av + Bv$ si $v \in \mathcal{D}(B)$.*

*1. Montrer que, si $B$ est fermé, alors $A + B$ est fermé.*

*2. Montrer que, si $B$ est densément défini (c'est-à-dire, si $\mathcal{D}(B)$ est dense dans $\mathcal{H}$), alors $(A+B)^* = A^* + B^*$.*

**Exercise 13.** *Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ des espaces de Hilbert, et soit $T_1$ un opérateur sur $\mathcal{H}_1$, et $T_2$ un opérateur sur $\mathcal{H}_2$. On dit que $T_1$ et $T_2$ sont* unitairement équivalent *s'il existe $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un isomorphisme unitaire tel que $\mathcal{D}(T_2) = U\mathcal{D}(T_1)$, et $UT_1U^*v = T_2v$ pour tout $v \in \mathcal{D}(T_2)$.*

*1. Montrer que $T_1$ est fermé /symétrique / auto-adjoint si et seulement si $T_2$ l'est.*

*2. Montrer que $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$, et $\sigma_p(T_1) = \sigma_p(T_2)$.*

*3. Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$, et soit $T$ l'opérateur donné par $\mathcal{D}(T) = H^2(\mathbb{R}^d)$, $T = -\Delta$. Montrer que $\sigma(T) = [0, \infty)$.*

**Exercise 14.** *Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$, et $(Tv)(n) := v(n+1) + v(n-1)$. Considérons l'application*

$$U : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(0, 2\pi) \quad (v(n))_n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n e^{inx}.$$

*1. Calculer $UTU^*$.*

*2. Que vaut $\sigma(T)$ ? $\sigma_p(T)$ ?*

## 4 Chapter 3

**Exercise 15** (Semi-groupe unitaire)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, et soit $T$ un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on pose $U(t) := e^{-itT}$.*

*1. Montrer que $U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, et que $U(t)$ est unitaire.*

*2. Montrer que $U(t+s) = U(t)U(s)$.*

*3. Montrer que $\lim_{s\to t} U(s)v = U(t)v$ pour tout $v \in \mathcal{H}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

*4. Montrer que $U(t)\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$.*

*5. Soit $f \in \mathcal{D}(T)$. Montrer que $F : \mathbb{R} \ni t \mapsto U(t)f \in \mathcal{H}$ appartient à $C^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, et qu'elle vérifie*

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = TF(t).$$

**Exercise 16.** *Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $T := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ avec $\mathcal{D}(T) = H^2(\mathbb{R})$, et $S := i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, avec $\mathcal{D}(T) = H^1(\mathbb{R})$.*

*1. Montrer que $T = S^2$. A-t-on $S = \sqrt{T}$ ?*

*2. Calculer explicitement $\mathrm{e}^{-itS}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

*3. Montrer que $\cos(t\sqrt{T}) = \cos(tS)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et calculer ces opérateurs explicitement*

*4. Calculer explicitement les opérateurs $\frac{\sin(t\sqrt{T})}{\sqrt{T}}$.*

**Exercise 17.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, soit $f \in \mathcal{H}$ et soit $\omega \in \mathbb{R}$. Soit $H$ un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. On notera $\sigma(H)$ son spectre.*
*Considérons une solution $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ de l'équation*

$$\begin{cases} i\frac{\partial u(t)}{\partial t} + Hu(t) = -fe^{i\omega t} \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

$$E(t) := \|u(t)\|^2_{\mathcal{H}}.$$

*1. Montrer que les solutions de (9) peuvent s'écrire comme*

$$u(t) = \Big(\frac{e^{it\omega} - e^{itH}}{\omega - H}\Big)f.$$

*2. Supposons que $\omega \notin \sigma(H)$. Montrer que $t \mapsto E(t)$ est borné.*
*3. Supposons que $Hf = \omega f$, $\|f\| = 1$. Montrer que $E(t) = t^2$.*
*4. Supposons que $\omega \in \sigma_{ac}(H)$ et que la densité d ela mesure spectrale de $f$ est continue en $\omega$. Montrer que $E(t) \sim_{t\to\infty} ct$ pour unc $> 0$.*

# 5 Chapter 4

**Exercise 18.** *Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{S}^2$, on a*

$$\big((-\Delta - \lambda^2)^{-1} f\big)(|x|\omega) = \frac{e^{i\lambda|x|}}{4\pi|x|}\hat{f}(-\lambda\omega) + O\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big).$$

**Exercise 19.** *Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. On rappelle que, dans de telles coordonnées, le laplacien s'écrit*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

*Considérons le potentiel $V \in L^\infty_{comp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ donné par*

$$V(r, \theta, z) := e^{i\theta}\mathbf{1}_{r\leq 1}\mathbf{1}_{|z|\leq 1}.$$

*Le but de cet exercice est de montrer que $-\Delta + V$ n'a pas de résonances.*

*Si $\ell \in \mathbb{Z}$, on notera $\Pi_\ell$ la projection sur le $\ell$-ième mode de Fourier :*

$$\Pi_\ell u(r, \theta, z) = \frac{e^{i\ell\theta}}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r, \phi, z)e^{-i\ell\phi}\mathrm{d}\phi.$$

*1. Soit $R > 0$. Montrer qu'il existe $C(R) > 0$ telle que pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ et tout $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ supportée dans $B(0, R)$ et qui vérifie $\Pi_\ell u = u$, on a*

$$\langle -\Delta u, u\rangle \geq C\ell^2\|u\|_{L^2}.$$

*2. Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ ne dépendant pas de $\theta$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe $C > 0$ dépendant de $\rho$ et de $\lambda$ telle que pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\|\Pi_\ell\rho(-\Delta - \lambda^2)^{-1}\rho\Pi_\ell\|_{L^2\to L^2} \leq \frac{C(\lambda)}{1 + |\ell|}.$$

*3. Montrer que, si $u$ est un état résonant, il existe $C > 0$ telle que l'on a pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$*

$$\|\Pi_{j+1}u\|_{L^2} \leq \frac{C}{1 + |j|}\|\Pi_j u\|_{L^2}.$$

*4. Conclure que $-\Delta + V$ n'a pas de résonances dans $\mathbb{C}$.*