Mémoire de Master 2
Sous la direction de **Stéphane Nonnenmacher**

Quelques aspects de l'équation de Schrödinger sur le tore

Maxime Ingremeau

Paris, le 30 août 2013

Préambule

"Or, à ce moment, je fus précisément favorisé d'une telle apparition magique. Comme quand, dans un pays qu'on ne croit pas connaître et qu'en effet on a abordé par un côté nouveau, après avoir tourné un chemin, on se trouve tout d'un coup déboucher dans un autre dont les moindres coins vous sont familiers, mais seulement où on n'avait pas l'habitude d'arriver par là, [...] ainsi tout d'un coup je me reconnus au milieu de cette musique nouvelle pour moi, en pleine sonate de Vinteuil."

Marcel Proust, *La Prisonnière*

De même que le narrateur de la Recherche face au septuor de Vinteuil, le physicien est terriblement déboussolé lors de son premier contact avec la mécanique quantique, tant celle-ci est différente de ses habitudes. Mais, par un examen minutieux, il y retrouve, cachée, la sonate belle de simplicité de la mécanique classique.

Le "principe de correspondance" nous dit en effet que l'on retrouve certains des aspects de la mécanique classique quand on considère la constante de Planck comme un simple paramètre, noté h, que l'on fait tendre vers 0 dans les équations de la mécanique quantique. Le fait de considérer cette limite est justifié par le fait que la constante de Planck est très petite dans le système d'unités international. L'un des pendants mathématiques du principe de correspondance est le théorème d'Egorov (théorème 2.1.7), qui nous dit que les évolutions classique et quantique se correspondent parfaitement quand h tend vers zéro, jusqu'à une échelle de temps, appelée temps d'Ehrenfest. C'est là un premier aspect de l'analyse semi-classique, dans lequel le paramètre h est toujours interprété comme étant la constante de Planck effective.

Le second aspect de l'analyse semi-classique, beaucoup plus général, est d'étudier des équations aux dérivées partielles dans lesquelles un paramètre, noté h, tend vers 0. L'exemple le plus simple de ce type de problèmes est peut-être celui du spectre du Laplacien sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ (avec conditions de Dirichlet ou de Neumann) :

$$h^2\Delta u + u = 0.$$

Comprendre cette équation quand h tend vers 0 revient à avoir des informations sur les hautes valeurs propres du Laplacien, et sur les fonctions propres associées.

Alternativement, on peut considérer une équation fixée, avec une condition initiale dépendant d'un paramètre h qui tend vers 0. Par exemple, on peut s'intéresser à l'équation des ondes, avec des conditions initiales oscillant de plus en plus vite.

Ainsi, si l'analyse semi-classique trouve sa motivation première dans l'étude de la mécanique quantique, elle se révèle être un outil de premier choix pour la compréhension d'un large panel de problèmes mathématiques, qui n'ont pas nécessairement de liens avec la physique quantique.

La première partie de ce mémoire comportera trois chapitres assez généraux sur l'analyse semi-classique sur les variétés, et commencera par quelques rappels de mécaniques classique et quantique, permettant d'avoir une bonne intuition des phénomènes étudiés. Nous continuerons par présenter la quantification de Weyl, qui est l'outil principal de l'analyse semi-classique. Nous présenterons ensuite des résultats dus à Macià ([Mac09]), qui permettent, à différentes échelles de temps, d'étudier la limite quand h tend vers 0 d'une suite de solutions de l'équation de Schrödinger .
Si ces résultats sont remarquables, car ils permettent une étude de la limite semi-classique au delà du temps d'Ehrenfest, ils ne nous fournissent pas d'information sur la dépendance des objets semi-classique obtenus en fonction du temps.
En fait, les propriétés des objets semi-classiques obtenus dépendent grandement de la géométrie de la variété sur laquelle on étudie l'équation de Schrödinger.

La seconde partie de ce mémoire est donc consacrée à l'étude d'un cas particulier, celui du tore plat. Cette seconde partie correspond aussi au second aspect de l'analyse semi-classique que nous avons explicité ci-dessus. Par un changement d'échelle temporelle, on fera disparaitre le paramètre h de l'équation de Schrödinger, qui se réécrira de la manière la plus courante en mathématiques :

$$i\partial_t \psi = (-\Delta + V)\psi$$

Le paramètre h ne devra donc plus être interprété comme la constante de Planck, mais simplement comme une manière d'indexer une suite de conditions initiales. Ceci explique pourquoi certaines des méthodes que nous exposerons dans cette seconde partie, et qui sont très spécifiques au cas du tore, permettent tout aussi bien d'avoir des informations sur l'équation des ondes que sur l'équation de Schrödinger.

Notations Dans tout ce mémoire, nous utiliserons les notations suivantes :

Le produit scalaire entre deux vecteurs $a, b \in \mathbb{R}^d$ sera noté $a \cdot b$.

Le produit scalaire entre deux fonctions L^2 sera noté $\langle f, g \rangle_{L^2}$.

Le produit de dualité entre un espace E et son dual E' sera noté $\left(\cdot,\cdot\right)_{E'}$.

Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, nous noterons $\mathbb{S}(E)$ sa sphère unité.

Si A, B sont des opérateurs sur un espace de Hilbert, on notera $[A, B]$ leur commutateur.

Si H est un espace de Hilbert, nous noterons $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés sur H.

Si H est un espace de Hilbert et si $\phi \in H$, $\|\phi\| = 1$, nous noterons $|\phi\rangle\langle\phi|$ la projection orthogonale sur ϕ.

Si $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ est un multiindice, on notera ∂^α l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^d$ donné par $\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_d^{\alpha_d}$. De plus, si $\xi \in \mathbb{R}^d$, on notera $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_d^{\alpha_d}$.

Si a est une fonction lisse de $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$, on notera $\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial a}{\partial x_d}$ le gradient de a par rapport aux variables de position uniquement.

L'opérateur laplacien sera défini sur $\mathbb{R}^d$ par $\Delta f = \frac{\partial f}{x_1^2} + ... + \frac{\partial f}{x_d^2}$, et sera donc négatif.

Si un ensemble A est mesurable, on notera par $|A|$ sa mesure de Lebesgue.

On dira parfois qu'une mesure est absolument continue, signifiant par là qu'elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

On notera $\mathcal{S}$ pour l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, et $\mathcal{S}'$ son dual, l'espace des distributions tempérées.

Les autres notations utilisées seront établies au fur et à mesure du mémoire.

Remerciements Je tiens à remercier Stéphane Nonnenmacher pour avoir accepté d'encadrer ce mémoire, et pour sa relecture attentive de ce rapport. En m'ayant introduit à toute la richesse de l'analyse semi-classique, il m'a permis de mieux apprécier la spécificité du cas du tore que nous considérons dans ce mémoire.

Je tiens également à remercier Charles Collot d'avoir pris le temps de trouver des contre-exemples précieux à toutes mes intuitions fausses en analyse fonctionnelle et en théorie de la mesure.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction : mécaniques classique et quantique

1.1 Rappels de mécanique classique

La formulation la plus simple de la mécanique classique est bien sur celle de Newton, qui affirme que le mouvement d'un objet ponctuel est gouverné par la relation masse $\times$ accélération $= \sum$ forces.

Cependant, cette formulation a le défaut de n'être vraie que pour des systèmes de coordonnées très particuliers, les coordonnées cartésiennes. Elle n'est donc pas du tout commode pour étudier la trajectoire d'une particule dont le mouvement est restreint à une variété, comme nous allons le faire dans ce mémoire.

Nous utiliserons donc la formulation de la mécanique classique dite hamiltonienne. Pour fixer les idées, nous travaillerons dans $M = \mathbb{R}^3$. Son espace cotangent T^*M s'identifie alors naturellement à $\mathbb{R}^6$. Toutefois, ce formalisme s'adapte à toute variété riemannienne.

T^*M est naturellement muni d'une forme symplectique, que nous noterons σ. Un point $(x, \xi) \in T^*M$ représente une particule se situant en x, et possédant une quantité de mouvement ξ.

H_{cl} sera le hamiltonien classique du système, c'est à dire une fonction de $T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$, qui est en général de la forme $H_{cl}(x, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2m} + V(x)$, où V est à valeurs réelles.

La trajectoire d'une particule dans l'espace des phases, $(x(t), \xi(t))$, est déterminée par les équations dites de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_\xi H_{cl} \\ \dot{\xi} = -\partial_x H_{cl} \end{cases}$$

Ecrivons ϕ_t pour le flot de ce système équation. C'est à dire que $\phi_t(x_0, \xi_0)$ est la valeur à l'instant t de la solution des équations de Hamilton ayant pour condition initiale (x_0, ξ_0).

On définit le crochet de Poisson de $f, g \in C_c^\infty(T^*M)$ comme étant :

$$\{f, g\} := \sigma(\partial f, \partial g).$$

En mécanique classique, une observable est simplement une quantité qui dépend de l'état du système. C'est donc une fonction $a : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ecrivons alors

$$a_t(x,\xi) := a(\phi_t(x,\xi)).$$

Cette quantité, représentant la valeur de l'observable à l'instant t, est gouvernée par l'équation :

$$\dot{a}_t = \{H_{cl}, a_t\}.$$

1.2 Mécanique quantique

En mécanique quantique, un objet n'a pas une position et une vitesse bien définies. Une particule à un instant t n'est donc pas représentée par un point dans $\mathbb{R}^3$, mais par une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$, telle que $\|\psi\|_{L^2} = 1$. ψ s'appelle alors la fonction d'onde de la particule.

Cette fonction ψ est interprétée comme donnant l'amplitude de probabilité de la particule. Plus précisément, si U est une partie mesurable de $\mathbb{R}^3$, alors la probabilité que la particule se trouve dans U est donnée par :

$$\int_U |\psi(x)|^2 dx$$

La condition de normalisation de ψ nous assure bien que la probabilité totale est égale à 1. L'équation nous donnant l'évolution du système est alors l'équation de Schrödinger, qui s'écrit :

$$ih\partial_t\psi(t,x) = H\psi(t,x).$$

H est un opérateur auto-adjoint de $L^2(\mathbb{R}^3)$, pas nécessairement continu, appelé hamiltonien quantique du système.

En l'absence de champ magnétique, le hamiltonien quantique s'écrit $H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V(x)$, où m est la masse de la particule, et V est un potentiel. Nous expliquerons dans le paragraphe suivant pourquoi le hamiltonien quantique est de cette forme. Quant à h, c'est une constante, plus souvent notée $\hbar$ en physique, appelée constante de Planck. Dans le système d'unités usuel, elle est très petite :

$$\hbar \approx 1 \times 10^{-34} J.s$$

Dans la suite, nous prendrons $m = 1$, et nous noterons h à la place de $\hbar$.

Le point de vue de Heisenberg En mécanique quantique, une observable est un opérateur auto-adjoint agissant sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. Nous discuterons dans la section suivante de la manière de passer d'une observable classique à une observable quantique.

La valeur moyenne d'une observable dans l'état ψ est donnée par la formule :

$$\langle A\rangle := \langle A\psi, \psi\rangle_{L^2}.$$

Par exemple, pour l'observable position, on trouve que la position moyenne de la particule est :

$$\int x|\psi(x)|^2,$$

ce qui est bien la formule à laquelle on s'attend, car $|\psi(x)|^2$ est la densité de probabilité de présence de la particule.

La présentation de la mécanique quantique que nous avons effectuée dans le paragraphe précédent est appelée “point de vue de Schrödinger”. Ce point de vue consiste à regarder l'évolution de la fonction d'onde au cours du temps.

Il existe une manière de considérer la mécanique quantique, appelée “point de vue de Heisenberg”. Il consiste à étudier l'évolution au cours du temps des valeurs moyennes des observables agissant sur la fonction d'onde, et non la fonction d'onde elle même.

Plaçons nous pour simplifier dans le cas où V est indépendant du temps, et notons $U_V^h(t)$ le propagateur de l'équation de Schrödinger. C'est l'opérateur unitaire tel que, si ψ est solution de l'équation de Schrödinger, on a $\psi(t,\cdot) = U_V^h(t)\psi(t=0,\cdot)$.

Comme V ne dépend pas du temps, on a $U_V^h(t) = e^{-\frac{it}{h}(-h^2\Delta+V)}$, et donc $U_V^h(t=0) = Id$, $\frac{d}{dt}U_V^h(t) = \frac{i}{h}(h^2\Delta - V)$, et $U_V^h(-t) = \left(U_V^h(t)\right)^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned}\langle A\rangle(t) &= \langle A\psi(t), \psi(t)\rangle \\ &= \langle AU_V^h(t)\psi, U_V^h(t)\psi\rangle \\ &= \langle A(t)\psi, \psi\rangle \\ &= \langle A(t)\rangle\end{aligned}$$

où $A(t) = U_V^h(-t)AU_V^h(t)$.

Ainsi, pour obtenir la valeur moyenne de A à l'instant t, il suffit de calculer la valeur moyenne de l'observable $A(t)$. On vérifie sans peine que $A(t)$ est la solution de l'équation différentielle, à valeur opérateurs :

$$\partial_t A(t) = \frac{i}{h}[H, A(t)].$$

Ce que nous devons retenir de cette parenthèse que le point de vue de Heisenberg, c'est que pour comprendre l'évolution quantique d'une système, il nous faut étudier des commutateurs entre opérateurs, de la même manière que pour comprendre un système classique, il nous faut comprendre des crochets de Poisson entre observables.

1.3 Analyse semi-classique

L'analyse semi-classique consiste à étudier l'équation de Schrödinger (ou d'autres équations), en considérant h comme un paramètre, et en faisant tendre h vers 0.

L'idée physique sous-jacente est le principe d'équivalence, qui affirme qu'en faisant tendre h vers 0 dans les équations de la mécanique quantique, on doit, en un certain sens, retrouver la mécanique classique. C'est ce principe, et le fait que la constante de Planck soit très petite dans un système d'unités adapté à notre échelle, qui explique pourquoi la mécanique classique est valide pour expliquer tous les phénomènes auxquels nous sommes habitués.

Un exemple Considérons un exemple très simple, celui du mouvement d'une particule libre, c'est à dire avec un potentiel $V = 0$. Considérons la condition initiale suivante :

$$u_h = (h\pi)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{\pi^2}{2h}|x|^2} e^{\frac{i}{h}\xi_0\cdot x}$$

Un tel état est appelé état cohérent autour de 0, de vitesse ξ_0. C'est, d'une certaine manière, les états dans lesquels on connait le mieux à la fois la position et la vitesse de la particule (l'inégalité de Heisenberg est alors une égalité). On a une variance de $\sqrt{2h}$, la particule est donc localisée en 0, à une distance de l'ordre de $\sqrt{h}$ près. Cela signifie que, dans la limite $h \longrightarrow 0$, la particule a une position bien définie, $x = 0$.

Nous avons choisi cette condition initiale particulière, car elle permet d'avoir une formule exacte pour la solution de l'équation de Schrödinger. On a, après quelques calculs impliquant la transformée de Fourier :

$$\psi_h(t,x) = \Big(\frac{4h}{\pi^2}\Big)^{3/4} \frac{1}{(2h(1+it)^{3/2})} exp\Big[-i\frac{\xi_0^2 t}{2h} + ix\cdot\xi_0/h - \frac{|x-t\xi_0|^2}{2h(1+it)}\Big], \tag{1.1}$$

et la densité de probabilité est :

$$|\psi(t)|^2(x) = \Big(\frac{4h}{\pi^2}\Big)^{3/4} \frac{1}{(2h(1+t^2)^{3/2})} exp\Big[\frac{|x-t\xi_0|^2}{2h(1+t^2)}\Big]. \tag{1.2}$$

Nous renvoyons le lecteur intéressé à [CTDF97] pour le détail des calculs. On observe encore une gaussienne, mais centrée en $t\xi_0$. Le centre de la gaussienne suit donc un mouvement classique. Cette fois-ci, la variance vaut $\sqrt{2h(1+t^2)}$. Pour un temps t fixé, quand on fait tendre h vers 0, on trouve que la particule est parfaitement localisée, en $\xi_0 t$.

Ce qu'il nous faut retenir de cet exemple concerne le lien entre l'équation de Schrödinger et la mécanique classique. On peut dire sur cet exemple que l'évolution et la limite semi-classique commutent à des temps finis : si l'on prend d'abord la limite $h \longrightarrow 0$, puis que l'on regarde l'évolution classique selon les lois de Newton, on obtient la même chose que si l'on fait évoluer le système jusqu'au temps t par l'équation de Schrödinger, puis que l'on fait tendre h vers 0. Cependant, si l'on considère des temps dépendant de h, ce raisonnement ne marche plus forcément. Par exemple, si on remplace t par $\tau_h t$, alors deux cas se présentent :
- Si $\tau_h = o(h^{-\frac{1}{2}})$, le résultat précédent est encore valable.
- Si $\tau_h \geq h^{-\frac{1}{2}}$, le sens à donner à la limite $h \longrightarrow 0$ n'est pas évident a priori.
Une manière de dire cela est qu'un état cohérent se délocalise en un temps de l'ordre $h^{-\frac{1}{2}}$. Ce temps est appelé temps d'Ehrenfest.

Ce fait est très général, et se généralise à l'équation de Schrödinger avec un potentiel, sur une variété riemannienne quelconque, et avec des conditions initiales quelconques. Nous donnerons un énoncé rigoureux dans le théorème 2.1.7, qui affirme que, pour des temps finis, évolution et limite semi-classique commutent. Remarquons toutefois que, dans le cas général, le temps d'Ehrenfest n'est plus nécessairement $h^{-\frac{1}{2}}$.

Remarque 1.3.1. *Il peut être surprenant à première vue de considérer des échelles de temps dépendant du paramètre h. Cependant, si on se souvient que la constante physique $\bar{h}$ s'exprime en J.s, on comprend qu'il y a plusieurs manières d'exploiter le fait qu'elle soit petite numériquement. On peut regarder les phénomènes se produisant à haute énergie, à haute fréquence, en temps long... ce qui correspond à des changements d'échelle différents. Il est donc intéressant de voir le sens que l'on peut donner à la limite semi-classique à différentes échelles de temps.*

Dans ce mémoire, nous nous proposons de :

- comprendre la quantification de Weyl, qui est une sorte de "dictionnaire" permettant de passer de la description quantique à la description classique dans la limite où $h \longrightarrow 0$.

- comprendre le sens que l'on peut donner à la limite $h \longrightarrow 0$ d'un système quantique évoluant pendant un temps quelconque, éventuellement plus grand que le temps d'Ehrenfest ;

- nous focaliser sur le cas du tore. Dans cet exemple très particulier, le phénomène de dispersion esquissé ci-dessus est beaucoup plus compliqué. L'heuristique du problème est que la particule suit simultanément toutes les trajectoires qui s'offrent à elle. Or certaines sont périodiques, avec des périodes plus ou moins longues, tandis que d'autres sont denses. Il peut donc y avoir des phénomènes d'interférences assez compliqués.

Chapitre 2

La quantification de Weyl

2.1 La quantification de Weyl sur $\mathbb{R}^d$

Tous les résultats de cette section sont très classiques, et nous les présenterons sans preuve. Le lecteur désirant plus de détails peut se référer à [Zwo12], en particulier au chapitre 4.

Présentation de la quantification de Weyl Quel lien y a t'il entre une observable classique et une observable quantique ? Un certain nombre d'arguments physiques (voir par exemple le chapitre 8 de [Bel07]) permettent d'inférer qu'à l'observable classique x_i, il faut associer l'observable quantique (qui est un opérateur) $X_i : \psi(x) \longrightarrow x_i\psi(x)$, et à l'observable impulsion selon la i-ème coordonnée ξ_i, l'opérateur $\Xi_i : \psi \longrightarrow \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi$.

Ces règles simples permettent d'expliquer la forme du hamiltonien quantique précédent : le hamiltonien classique $H_{cl}(x,\xi) = \frac{|\xi|^2}{2m} + V(x)$ devient tout naturellement $H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V(x)$.

Cependant, ces règles ne permettent pas de définir un analogue quantique de chaque observable classique. Le problème est que les observables classiques commutent, alors que les observables quantiques ne commutent pas forcément. Quel opérateur choisir pour l'observable $x\xi$? $X\Xi$ ou ΞX ? Pour ne pas privilégier un choix par rapport à l'autre, on choisit en général $\frac{1}{2}(X\Xi + \Xi X)$. La formule de quantification de Weyl, que nous allons présenter ci-dessous, permet d'associer à toute observable classique une observable quantique de manière non univoque.

Définition 2.1.1. *Pour $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C})$, $a = a(x,\xi)$, on définit une famille d'opérateurs $Op_h(a)$, indexés par $h \in]0;1]$ agissant sur $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ par*

$$Op_h(a)u(x) := \frac{1}{(2\pi h)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} a\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big)u(y)dyd\xi. \tag{2.1}$$

On dit alors que $Op_h(a)$ est la quantification de Weyl de a, et que a est le symbole de $Op_h(a)$.

La quantification de Weyl est d'abord définie sur la classe des fonctions $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C})$, mais peut ensuite être étendue par densité à une classe beaucoup plus large de fonctions. Un espace fonctionnel particulièrement utile pour étudier la quantification de Weyl est le suivant :

$$S := \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) \text{ telle que, } \forall\alpha \in \mathbb{N}^{2d}, \exists C_\alpha \text{ tel que } \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2d})} \le C_\alpha\}.$$

On a par exemple le résultat suivant :

Théorème 2.1.1. *(i) Soit $a \in \mathscr{S}$. Alors, $\forall h \in]0,1]$, $Op_h(a)$ se prolonge en un opérateur continu de $\mathscr{S}'$ dans $\mathscr{S}$.*

(ii) Soit $a \in \mathscr{S}'$. Alors, $\forall h \in]0,1]$, $Op_h(a)$ se prolonge en un opérateur continu de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}'$.

(iii) Soit $a \in S$. Alors, $\forall h \in]0,1]$, $Op_h(a)$ se prolonge en un opérateur continu de $\mathscr{S}'$ dans $\mathscr{S}'$.

On souhaite plutôt avoir des opérateurs agissant sur L^2, afin d'avoir de vrais observables.

Théorème 2.1.2 (Calderón-Vaillancourt.)**.** *Si $a \in S$, alors, $\forall h \in]0,1]$, $Op_h(a)$ se prolonge en un opérateur continu de L^2 dans L^2, toujours noté $Op_h(a)$, ayant une norme d'opérateur bornée indépendamment de h. On a alors :*

$$\|Op_h(a)\|_{L^2 \to L^2} \leq C \sup_{\mathbb{R}^{2d}} |a| + O(h^{\frac{1}{2}})$$

quand h tend vers 0.

Remarque 2.1.1. *Notons que, formellement, la quantification de Weyl peut très bien agir sur des fonctions dépendant du paramètre h. Notons l'identité formelle suivante, que nous utiliserons par la suite. Si $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, on a, pour tout $h > 0$:*

$$Op_h(a(x,\xi)) = Op_1(a(x,h\xi)). \tag{2.2}$$

La quantification de Weyl nous redonne bien les règles imprécises de quantification que nous avons énoncé plus haut, comme le dit le lemme suivant.

Lemme 2.1.1. *Si $a(x,\xi) = \xi^\alpha$, alors $Op_h(a) = (\frac{h}{i}\partial)^\alpha$.*
Si $a(x,\xi) = a(x)$, alors $Op_h(a) = M_a$, l'opérateur de multiplication par a.

Notons dès à présent la définition suivante, qui sera centrale par la suite :

Définition 2.1.2. *Soit u une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On lui associe une distribution w_u^h, appelée distribution de Wigner, définie par :*

$$\forall a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d}), \left(w_u^h, a\right)_{\mathscr{D}'} = \langle Op_h(a)u, u\rangle_{L^2}$$

Quelques propriétés de la quantification de Weyl. Les opérateurs considérés en mécanique quantique sont généralement auto-adjoints. Le théorème suivant nous assure que la quantification de Weyl redonne bien cette propriété.

Théorème 2.1.3. *Si $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$ est un symbole à valeurs réelles, alors, $\forall h \in]0,1]$, $Op_h(a)$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Le théorème suivant nous dit que, si un symbole est positif, l'opérateur associé sera presque positif.

Théorème 2.1.4 (Inégalité de Gårding)**.** *Soit $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, telle que $a \geq 0$ sur $\mathbb{R}^{2d}$. Alors il existe une constante $C \geq 0$ et $h_0 > 0$ tels que*

$$\langle Op_h(a)u, u\rangle \geq -Ch\|u\|_{L^2}^2$$

pour tout $0 < h < h_0$ et tout $u \in L^2(M)$.

Si le symbole a décroit suffisamment vite à l'infini, l'opérateur $Op_h(a)$ sera compact, comme le dit le théorème suivant.

Théorème 2.1.5. *Soit $a \in \mathscr{S}$. Alors, $\forall h \in]0,1]$, l'opérateur $Op_h(a) : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ est compact.*

Remarque 2.1.2. *Comme nous l'avons dit, la quantification de Weyl peut être définie pour des fonctions moins régulières que les C_c^∞ ou $\mathscr{S}$. La bornitude de $Op_h(a)$ comme opérateur de L^2 nécessite qu'un certain nombre de dérivées de a soient bornées. La compacité nécessite qu'un certain nombre de dérivées de a décroissent suffisamment rapidement à l'infini.*
Ce contrôle sur les dérivées de a se traduit en général par l'appartenance de a à une "classe de symboles". Les classes de symbole permettent également de traiter le cas où a dépend du paramètre h.
Nous aurons besoin de symboles plus généraux que ceux de $\mathscr{S}$ uniquement pour obtenir la formule 2.7. Nous ne définirons donc pas les classes de symboles rigoureusement, et nous renvoyons le lecteur intéressé à [Zwo12].

Composition de quantifiés Nous allons voir que la composition de deux quantifiés de Weyl se fait suivant des règles très simples, du moins à des termes d'ordre h près. Nous noterons $f = O_{\mathscr{S}}(h^n)$ pour dire que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, il existe $C_{\alpha,\beta}$ tel que $\sup_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f| \leq C_{\alpha,\beta} h^n$.

Pour les fonctions f agissant sur $(x, \xi, y, \eta) \in \mathbb{R}^{4d}$, on écrira $A(D)f := \frac{1}{2}(D_\xi D_y - D_\eta D_x)f$.

Théorème 2.1.6. *Soient a et b dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$. Alors il existe un $h_0 > 0$ et une fonction $a\#b \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$ telle que $\forall h \in]0, h_0[$, $Op_h(a)Op_h(b) = Op_h(a\#b)$. On a la formule explicite suivante :*

$$a\#b(x,\xi) = e^{ihA(D)}\Big(a(x,\xi)b(y,\eta)\Big)\Big|_{(y,\eta)=(x,\xi)} \tag{2.3}$$

La formule 2.3 nous permet d'obtenir le développement limité suivant :

Proposition 2.1.1. *Soient $a, b \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$. On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $\forall h \in]0, h_0[$:*

$$a\#b(x,\xi) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(ih)^k}{k!} A(D)^k (a(x,\xi)b(y,\eta))\Big|_{(y,\eta)=(x,\xi)} + O_{\mathscr{S}}(h^{N+1}) \tag{2.4}$$

Corollaire 2.1.1. *(i) On a le développement limité suivant $\forall h \in]0, h_0[$:*

$$a\#b = ab + \frac{h}{2i}\{a,b\} + O_{\mathscr{S}}(h^2) \tag{2.5}$$

(ii) Si $a, b \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, on a $\forall h \in]0, h_0[$:

$$[Op_h(a), Op_h(b)] = \frac{h}{i} Op_h\big(\{a,b\}\big) + O_{\mathcal{L}(L^2)}(h^3) \tag{2.6}$$

(iii) Si $a, b \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, et $spt(a) \cap spt(b) = \emptyset$, alors $\forall h \in]0, h_0[$:

$$a\#b = O_{\mathscr{S}}\big(h^\infty\big).$$

Remarque 2.1.3. *La quantification de Weyl opère donc une correspondance entre les crochets de Poisson, décrivant l'évolution classique d'une observable, et le commutateur, décrivant une évolution quantique. Nous reviendrons par la suite sur ce lien entre évolutions quantique et classique.*

Les résultats de compositions restent vrais pour des fonctions a dans des classes de symboles plus larges que $\mathscr{S}$. On peut en déduire le lemme suivant, qui nous servira souvent par la suite.

Lemme 2.1.2. *Si $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, on a $\forall h \in]0,1[$:*

$$\Big[-\frac{1}{2}\Delta, Op_h(a)\Big] = \frac{1}{ih}Op_h(\xi \cdot \nabla a) \tag{2.7}$$

Eléments de démonstration. On sait que $-h^2\Delta$ est le quantifié de Weyl du symbole $(x,\xi) \mapsto |\xi|^2$. On en déduit, par la formule 2.6 que

$$\begin{aligned}\Big[-\frac{1}{2}\Delta, Op_h(a)\Big] &= \Big[-\frac{1}{2h^2}Op_h(|\xi|^2), Op_h(a)\Big]\\ &= \frac{1}{2ih}Op_h(\{|\xi^2|, a|\}) + O(h)\end{aligned}$$

Or, par la formule 2.3, le terme d'ordre h fait intervenir des dérivées à partir de l'ordre 3, qui sont donc toutes nulles. De plus, $\nabla|\xi|^2 = 2\xi$, donc $\{|\xi^2|, a|\} = 2\xi \cdot \nabla a$. On en déduit bien la formule

$$\Big[-\frac{1}{2}\Delta, Op_h(a)\Big] = \frac{1}{ih}Op_h(\xi \cdot \nabla a).$$

□

Equation de Schrödinger et évolution classique. Notons $H_{cl}(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$ le hamiltonien classique, et ϕ_t le flot hamiltonien associé.

Nous supposerons pour simplifier que V est indépendant du temps, et est borné indépendamment de h, ainsi que toutes ses dérivées, de telle sorte que ϕ_t est bien défini pour tout temps. Si $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, nous écrirons $a_t(x,\xi) := a(\phi_t(x,\xi))$, l'évolution classique de l'observable a.

Notons $H_h = -\frac{h^2}{2}\Delta + V(x)$ le hamiltonien quantique, qui est le quantifié de H_{cl}. On considère l'équation de Schrödinger :

$$ih\partial_t\psi_h(t,x) - H_h\psi_h(t,x) = 0 \qquad (t,x) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$$

Nous noterons $U_V^h(t)$ le propagateur de cette équation. C'est à dire que l'unique solution de cette équation avec comme condition initiale $\psi_h|_{t=0} = u_h$ est $U_V^h(t)u_h$. $U_V^h(t)$ est alors un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Lorsque $V = 0$, nous noterons le propagateur $U_0^h(t)$, ou encore $e^{ith\Delta/2}$.

Remarque 2.1.4. *Le fait qu'il existe une unique solution à l'équation et le caractère unitaire de U_V^h provient de la théorie spectrale.*

Si $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, notons $A(t) := U_V^h(-t)Op_h(a)U_V^h(t)$ son évolution quantique.
Le théorème suivant nous dit que, pour des temps finis, évolution classique et évolution quantique se correspondent, à un terme d'ordre h près.

Théorème 2.1.7. *[Théorème d'Egorov] Soit $T > 0$. Notons $\tilde{A}(t) := Op_h(a_t)$. On a :*

$$\|A(t) - \tilde{A}(t)\| = O(h) \text{ uniformément pour } 0 \leq t \leq T$$

2.2 La quantification de Weyl sur le tore

Nous noterons $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ le tore plat de dimension d, et nous identifierons $T^*\mathbb{T}^d$ à $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$.

Soit $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on peut identifier $a(\cdot,\xi)$ à une fonction $2\pi\mathbb{Z}^d$-périodique sur $\mathbb{R}^d$. Cependant, cette fonction est dans S, il nous faut donc utiliser le théorème 2.1.1 (iii). La quantification de Weyl de a s'écrit alors formellement, pour $u \in \mathcal{S}'$:

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^d), Op_h(a)u(x) := \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} a\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big) u(y) dy d\xi.$$

Soit $k \in 2\pi\mathbb{Z}^d$. On a :

$$\begin{aligned} Op_h(a)u(x+k) &:= \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}(x+k-y)\cdot\xi} a\Big(\frac{x+k+y}{2}, \xi\Big) u(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}(x+k-y)\cdot\xi} a\Big(\frac{x-k+y}{2}, \xi\Big) u(y) dy d\xi \end{aligned}$$

car a est $2\pi\mathbb{Z}^d$-périodique. En faisant le changement de variable $\tilde{y} = y - k$, on en déduit que

$$Op_h(a)u(x+k) = \big(Op_h(a)u(\cdot + k)\big)(x).$$

Par conséquent, si $a \in S$ est $2\pi\mathbb{Z}^d$-périodique en la variable x, et si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est $2\pi\mathbb{Z}^d$-périodique, alors $Op_h(a)u$ est $2\pi\mathbb{Z}^d$-périodique. On en déduit bien une définition de la quantification de Weyl sur le tore $\mathbb{T}^d$.

Cette définition peut se réécrire en termes de séries de Fourier. Cette reformulation sera utile par la suite.

Lemme 2.2.1. *Soit* $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$, $a(x,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{a}(k,\xi)\frac{e^{ik.x}}{(2\pi)^{d/2}} \in L^2(\mathbb{T}^d)$, *et* $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{u}(k)\frac{e^{ik.x}}{(2\pi)^{d/2}} \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$. *On a alors*

$$Op_h(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} e^{ix\cdot(j+k)} \hat{a}(j, \frac{jh}{2} + hk)\hat{u}(k)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} Op_h(a)u(x) &= \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} a\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big) u(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}h^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \hat{a}(j,\xi) e^{ij\cdot(x+y)/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{u}(k) e^{ik\cdot y} dy d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}h^d} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot(\frac{j}{2}+\frac{\xi}{h})} e^{iy\cdot(\frac{j}{2}+k-\frac{\xi}{h})} \hat{a}(j,\xi)\hat{u}(k) dy d\xi \end{aligned}$$

L'intégrale en y vaut $\delta_{\xi-hk-jh/2}$ au sens des intégrales oscillantes. On a donc bien

$$Op_h(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} e^{ix\cdot(j+k)} \hat{a}(j, \frac{jh}{2} + hk)\hat{u}(k)$$

□

Corollaire 2.2.1. *On a*

$$\|Op_h(a)u\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

Par conséquent, si $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$, on peut prolonger $Op_h(a)$ comme un opérateur continu de $L^2(\mathbb{T}^d)$ dans lui même.

On a aussi une expression simple pour la distribution de Wigner sur le tore.

Lemme 2.2.2. *Si $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{u}(k)\frac{e^{ik\cdot x}}{(2\pi)^{d/2}} \in L^2(\mathbb{T}^d)$, sa distribution de Wigner est :*

$$w_u^h(x,\xi) := \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} \hat{u}(k)\overline{\hat{u}(j)}\frac{e^{i(k-j)\cdot x}}{(2\pi)^d}\delta_{\frac{h}{2}(k+j)}(\xi).$$

Démonstration. Prenons $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$, que l'on identifiera à une fonction sur $\mathbb{R}^{2d}$. On a

$$(w_u^h, a) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} a\Big(\frac{x+y}{2}\Big)u(y)e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi}\overline{u(x)}dxdyd\xi.$$

Il nous faut maintenant décomposer le terme de droite en séries de Fourier, et vérifier que l'on retrouve bien w_u^h. Ce terme se réécrit :

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} dxdyd\xi \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \hat{u}(j)\overline{\hat{u}(k)}\hat{a}(l,\xi)e^{ij\cdot y}e^{-ik\cdot x}e^{i\frac{x+y}{2}\cdot l}e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi}$$

En intégrant en x et en y, tous les termes oscillants s'annulent. On ne doit donc garder que les termes pour lesquels on a $-k+l/2 = -\xi/h$ et $j+l/2 = \xi/h$.
On en déduit que $\xi = h\frac{k+j}{h}$, et que $l = k-j$. On a donc bien :

$$(w_u^h, a) = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} \hat{u}(j)\overline{\hat{u}(k)}\hat{a}\Big(j-k, h\frac{k+j}{2}\Big)$$

et le lemme en découle. □

De façon générale, on peut dire que tous les résultats sur la quantification de Weyl sur $\mathbb{R}^d$ présentés précédemment restent vrais sur $\mathbb{T}^d$, car on ne fait que les restreindre à une classe de fonctions particulières, celle des fonctions $(2\pi\mathbb{Z})^d$-périodiques.

Remarque 2.2.1. *Dans toute la suite de ce mémoire, nous nous placerons soit dans le cas du tore, soit dans le cas de l'espace euclidien.*

Sur une variété Riemannienne quelconque, on ne peut définir la quantification de Weyl de manière intrinsèque qu'à un terme d'ordre h^2 près. Néanmoins, les résultats du chapitre suivant peuvent s'étendre au cas d'une variété riemannienne compacte, en mettant quelques restrictions sur le potentiel V et sur l'échelle de temps τ_h.

Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article [Mac09] pour la preuve des résultats suivants dans ce cadre plus général.

Chapitre 3

L'Equation de Schrödinger à différentes échelles de temps

3.1 Le cas d'une variété quelconque

On s'intéresse à l'équation de Schrödinger sur une variété M, qui s'écrit :

$$ih\partial_t\psi_h(t,x) + \frac{h^2}{2}\Delta\psi_h(t,x) - V(t,x;h)\psi_h(t,x) = 0 \qquad (t,x) \in (\mathbb{R}\times M)$$

Nous supposerons pour simplifier $V \in C^\infty(\mathbb{R}\times M\times]0;1[)$, et nous supposerons toutes ses dérivées bornées.

Nous supposerons de plus que $\lim_{h\to 0} \|V(\cdot,\cdot;h)\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times M)} = 0$. Cette hypothèse sera toujours vérifiée dans le chapitre suivant, où l'on prendra V proportionnel à h^2. Un potentiel V qui tend vers 0 avec h correspond à un potentiel purement quantique, qui n'apparait pas dans la dynamique classique sous-jacente. Pour le cas d'un potentiel indépendant de h, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article [Mac09].

Nous voulons étudier le comportement asymptotique d'une famille de solutions de cette équation quand $h \longrightarrow 0$. En particulier, on aimerait faire le lien avec la dynamique classique sous-jacente.

La première question à se poser est celle de la topologie la mieux adaptée pour étudier les solutions de l'équation de Schrödinger.

Une manière naturelle de trouver une limite quand $h_n \longrightarrow 0$ est de considérer la limite L^2-faible de (u_{hn}). Cependant, la topologie L^2-faible ne conserve pas la norme L^2. Si chaque élément de la suite représente un état physique, donc normalisé dans L^2, leur limite pour cette topologie ne sera plus forcément normalisée...

Puisque l'objet ayant un réel sens physique est $|u_h|^2$, représentant la densité de probabilité, on peut considérer $(|u_h|^2)$ comme étant une suite bornée dans L^1. Cette suite admet donc une valeur d'adhérence dans $\mathcal{M}_+(M)$, pour la topologie faible-*. La limite sera alors une mesure de probabilité, ce qui peut bien représenter la densité de probabilité de présence d'une particule.

Le problème, c'est qu'en prenant le module de u_h, on perd toute information sur la phase cette fonction. A cause de cela, on n'a aucun espoir d'avoir une loi de propagation pour la limite de $(|U_V^h(\tau_h)u_h|^2)$.

La bonne notion pour avoir une limite semi-classique dont on puisse comprendre le comportement en fonction du temps est celle de distribution de Wigner, dont nous rappelons la définition.

3.1.1 Mesures semi-classiques indépendantes du temps

Rappelons la définition d'une distribution de Wigner.

Définition 3.1.1. *Soit u une fonction dans $L^2(M)$. On lui associe une distribution w_u^h, appelée distribution de Wigner, définie par :*
$\forall a \in C_c^\infty(T^*M), \left(w_u^h, a\right)_{\mathscr{D}'} = \langle Op_h(a)u, u\rangle_{L^2}$

Remarque 3.1.1. *La mesure de Wigner est un objet permettant de localiser u dans l'espace des phases, car elle donne des informations à la fois sur u et sur sa transformée de Fourier. A cause de l'inégalité d'Heisenberg, cette localisation ne peut se faire qu'à un terme d'ordre h près.*

Théorème 3.1.1. *Soit (u_h) une suite bornée dans $L^2(M)$.*
Il existe une suite $h_k \longrightarrow 0$ et une mesure de Radon positive $\mu_{u,0}$ telles que, pour tout $a \in C_c^\infty(T^*M)$,

$$\lim_{h_k \to 0^+} \langle Op_{h_k}(a)u_{h_k}, u_{h_k}\rangle = \int_{T^*M} a(x,\xi)\mu_{u,0}(dx, d\xi)$$

Remarque 3.1.2. *Cela signifie que, quitte à extraire, les distributions de Wigner convergent toujours pour la topologie faible-* vers une mesure positive.*

Cette mesure $\mu_{u,0}$ est appelée une mesure semi-classique associée à (u_h), ou bien la mesure semi-classique associée à (u_{h_k})

Du fait que les distributions de Wigner sont une mesure dans la limite $h \to 0$, on fait parfois un abus de langage en les appelant "mesures de Wigner".

Démonstration. Par le théorème 2.1.2, la suite des mesures de Wigner est bornée dans $\mathscr{D}'$. Par le théorème de Banach-Alaoglu, on peut donc supposer en extrayant que cette suite converge pour la topologie faible-* vers une distribution μ.
Le théorème 2.1.2 nous donne, pour tout $a \in C_c^\infty(T^*M)$ l'inégalité :

$$\left(w_u, a\right)_{\mathscr{D}'} \leq C \sup_M |a| + O(h^{\frac{1}{2}})$$

Par conséquent, en passant à la limite, on a :

$$\left(\mu, a\right)_{\mathscr{D}'} \leq C \sup_M |a|$$

Ceci nous dit que μ est une distribution d'ordre 0, autrement dit (par le théorème de représentation de Riesz), une mesure de Radon.
Pour montrer que μ est une mesure positive, on considère une fonction test a positive, et il nous faut montrer que

$$\int_{T^*M} a d\mu \geq 0.$$

Le théorème 2.1.4 nous dit assure que :

$$\left(w_u, a\right)_{\mathscr{D}'} \geq -Ch\|u(h)\|_{L^2}^2$$

En passant à la limite, on a bien le résultat cherché. □

Nous donnerons maintenant sans preuve deux exemples de mesures semi-classiques. Le lecteur intéressé par la preuve peut se référer au chapitre 5 de [Zwo12].

Exemple 3.1.1 (Etats cohérents et mesure semi-classique)**.** *Soit* $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$*. L'état cohérent correspondant est :*

$$u_h(x) := (\pi h)^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(x-x_0)\cdot\xi_0 - \frac{1}{2h}|x-x_0|^2}.$$

L'unique mesure semi-classique associée à u_h *est* $\mu_{u,0}(x,\xi) = \delta_{(x_0,\xi_0)}$.

Exemple 3.1.2 (Etats lagrangiens et mesure semi-classique)**.** *Soient* $\phi, b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*, avec* $\|b\|_{L^2} = 1$*. On pose*

$$u_h(x) := b(x) e^{\frac{i\phi(x)}{h}}.$$

L'unique mesure semi-classique associée à u_h *est* $\mu_{u,0}(x,\xi) = |b(x)|^2 \delta_{\{\xi = \partial\phi(x)\}}$.

3.1.2 Mesures semi-classiques dépendantes du temps

Le cas des temps finis Nous venons de vois qu'à toute suite de fonctions bornée $u_h \in L^2(M)$, on peut associer une mesure semi-classique $\mu_{u,0}$.

Si on laisse le propagateur de l'équation de Schrödinger agir pendant un temps t, on obtient une nouvelle suite de fonctions $U_v(t)u_h$, qui est encore bornée dans $L^2(M)$. On peut donc lui associer une mesure semi-classique, $\mu_{u,t}$.

Il est alors naturel de se demander comment les mesures $\mu_{u,t}$ dépendent de t.

Dans le cas où $M = \mathbb{R}^d$ ou $M = \mathbb{T}^d$, celui-ci est directement donné par le théorème d'Egorov, qui nous dit que $\big(\mu_{u,t}, a\big) = \big(\mu_{u,0}, a_t\big)$, où $a_t(x,\xi) = a(\phi_t(x,\xi))$.

Différentes échelles de temps La situation n'est plus aussi simple quand on considère la valeur de la solution en un temps dépendant de h. Pour cela, on prend une fonction

$$\tau : \begin{cases}]0,1[\longrightarrow]1, +\infty[\\ \qquad h \longmapsto \tau_h \end{cases}$$

telle que $\lim_{h\to 0} \tau_h = +\infty$.

On veut alors étudier le propagateur $U_V^h(\tau_h t)$. On peut montrer que le théorème d'Egorov est vrai sur $\mathbb{R}^d$ jusqu'à une échelle de temps $\log(\frac{1}{h})$. Un tel temps est parfois appelé temps d'Ehrenfest. C'est l'échelle de temps à partir de laquelle les évolutions classique et quantique ne se correspondent plus.

Remarque 3.1.3. *Dans la littérature, il y a plusieurs concepts appelés temps d'Ehrenfest. Certains auteurs le définissent comme le temps que met un état cohérent à se délocaliser, comme nous l'avons fait dans l'introduction. D'autres le définissent comme l'échelle de temps jusqu'à laquelle le théorème d'Egorov est vrai.*

Ces deux définitions ne sont pas équivalentes : les deux dépendent de la géométrie de la variété, ainsi que du potentiel appliqué, mais la première dépend en plus du point en lequel est centré l'état cohérent.

Nous n'aurons pas besoin de ces notions dans la suite de ce mémoire, car nous nous placerons à des échelles de temps bien plus grandes.

Remarque 3.1.4. *En mathématiques, il est courant de prendre toutes les constantes physiques égales à un, et d'étudier l'équation de Schrödinger sous la forme :*

$$i\partial_t \psi(t,x) + \frac{1}{2}\Delta\psi(t,x) - V(x)\psi(t,x) = 0.$$

Cette forme de l'équation correspond à étudier une échelle de temps $\tau_h = \frac{1}{h}$, avec un potentiel $h^2 V(x)$, où V est indépendant de h. Nous verrons par la suite que cette échelle de temps est très particulière, car le propagateur est indépendant de h.

Nous allons demander aux conditions initiales de l'équation de Schrödinger qu'elles n'oscillent pas trop vite par rapport au paramètre h.

Définition 3.1.2. *Soit (u_h) une suite de fonctions bornée dans $L^2(M)$. On dira qu'une telle suite est h-oscillante si elle vérifie pour tout $\chi \in C_c^\infty(M)$:*

$$\lim_{R\to-\infty} \limsup_{h\to 0^+} \|\mathbf{1}_{]-\infty,R[} h^2\Delta\chi u_h\|_{L^2(M)} = 0. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.5. *Sur une variété compacte comme le tore, cette condition nous dit que l'énergie de u_h est concentrée sur des modes de Fourier correspondant à des valeurs propres de taille au plus R/h^2*

Remarque 3.1.6. *Comme on demande que $\lim_{h\to 0} \|V(\cdot,\cdot;h)\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times M)} = 0$, l'hypothèse d'h-oscillation est équivalente à*

$$\lim_{R\to+\infty} \limsup_{h\to 0^+} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{1}_{]R,+\infty[} H_h \chi u_h\|_{L^2(M)} = 0.$$

Théorème 3.1.2. *Soit (u_h) une suite de fonctions bornée dans $L^2(M)$, et h-oscillante. Alors il existe une sous-suite de (u_h), que l'on écrira toujours (u_h), et une mesure finie dépendant du temps, $\mu_u \in L^\infty(\mathbb{R}_t; M_+(T^*M))$, telle que l'on ait :*
Pour tout $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ et tout $a \in C_c^\infty(T^*M)$, on a

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \langle Op_h(a) U_V^h(\tau_h t) u_h, U_V^h(\tau_h t) u_h \rangle = \int_{\mathbb{R}\times T^*M} \phi(t) a(x,\xi) \mu_u(t, dx, d\xi)$$

Démonstration. Notons $\psi_h(t,x) := U_V^h(\tau_h t) u_h(x)$, et considérons la distribution de Wigner spatio-temporelle $W_h \in D'(T^*(\mathbb{R}\times M))$ définie par

$$\big(W_h, b\big) := (\tilde{Op}_h(b_h)\psi_h, \psi_h),$$

où pour tout $b \in C_c^\infty(T^*(\mathbb{R}\times M))$, on écrit $b_h(t,x,\tau,\xi) := b(t,x,\tau/\tau_h,\xi)$, et où on note $\tilde{Op}$ la quantification agissant sur des fonctions du temps et de l'espace.

W_h est bornée dans $D'(T^*(\mathbb{R}\times M))$. Par les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 3.1.1, on obtient que, quitte à extraire, la suite W_h converge dans $\mathcal{D}'(T^*(\mathbb{R}\times M))$ vers une mesure de Radon positive $\tilde{\mu}$. C'est à dire que l'on a, pour une suite $h_k \longrightarrow 0$, et pour tout $b \in C_c^\infty(T^*(\mathbb{R}\times M))$:

$$\lim_{h_k\to 0^+} \big(W_{h_k}, b\big) = \int_{T^*(\mathbb{R}\times M)} b(t,x,\tau,\xi) d\tilde{\mu}(t,x,\tau,\xi). \tag{3.2}$$

Prenons $R > 0$ $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $[-1;1]$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, et $a \in C_c^\infty(T^*M)$. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big\langle Op_h(a)U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\big\rangle &= \big\langle \tilde{Op}_h(\phi a)\psi_k, \psi_k\big\rangle \\ &= \big\langle \tilde{Op}_h(b_h)\psi_k, \psi_k\big) + (\tilde{Op}_h(c))\psi_k, \psi_k\big\rangle \\ &= \big(W_{h_k}, b\big) + \big\langle \tilde{Op}_h(c))\psi_k, \psi_k\big\rangle\end{aligned} \tag{3.3}$$

où $b(t,x,\tau,\xi) := \phi(t)\chi(\tau/R)a(x,\xi)$, et $c(t,x,\tau,\xi) := \phi(t)(1-\chi(\tau/\tau_h R))a(x,\xi)$.

Il nous faut montrer que le terme $\langle \tilde{Op}_h(c))\psi_k, \psi_k\rangle$ est négligeable quand $h \longrightarrow 0$ et $R \longrightarrow +\infty$. On a $(\tilde{Op}_h(c))= Op_h(a)\tilde{Op}_h(\phi(1-\chi(\ \cdot\ /\tau_h R)))$, car a et $\phi(1-\chi)$ dépendent de variables indépendantes. Notons $\sigma_R := \sqrt{1-\chi(\tau/R)}$. Par la formule 2.5, on a :

$$\tilde{Op}_h(\phi(1-\chi(\ .\ /\tau_h R))) = \tilde{Op}_h(\phi)\tilde{Op}_h(\sigma_R(\ .\ /\tau_h))\tilde{Op}_h(\sigma_R(\ .\ /\tau_h)) + O(h)$$

Comme $\tilde{Op}_h(\phi)$ n'est que la multiplication par ϕ, on en déduit :

$$\big\langle \tilde{Op}_h(c)\psi_k, \psi_k\big\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big\langle Op_h(a)\tilde{Op}_h(\sigma_R(\ \cdot\ /\tau_h))\psi_k, \tilde{Op}_h(\sigma_R(\ \cdot\ /\tau_h))\psi_k\big\rangle dt + O(h)$$

Or, comme σ_R ne dépend que de τ, on a par définition de ψ_k

$$\tilde{Op}_h\big(\sigma_R(\ \cdot\ /\tau_h)\big)\psi_k = \sigma_R(H_h)\psi_k.$$

On a donc $\big\langle \tilde{Op}_h(c))\psi_k, \psi_k\big\rangle \leq C_{a,\phi}\|\sigma_R(H_h)\psi_k\|^2_{L^2(M)} + O(h)$. L'hypothèse 3.1 nous assure bien que, pour tout h, ce terme tend vers 0 quand $R \longrightarrow +\infty$.

Intéressons-nous maintenant au premier terme dans la dernière ligne de 3.3.

Comme $b \in C_c^\infty(T^*(\mathbb{R}\times M))$, la formule 3.2 nous donne bien, en faisant tendre d'abord $h \longrightarrow 0$ puis $R \longrightarrow +\infty$:

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big\langle Op_h(a)U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\big\rangle dt = \int_{T^*(\mathbb{R}\times M} \phi(t)a(x,\xi)\tilde{\mu}(t,dx,d\tau,d\xi). \tag{3.4}$$

Remarquons que l'on a :

$$\big\langle Op_h(a)U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\big\rangle \leq C\|a\|_{L^\infty(T^*M)}\|u_h\|^2_{L^2(M)} + O(h^{1/2}).$$

On en déduit que la convergence dans 3.4 a lieu pour tout $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, et que la limite μ est dans $L^\infty(\mathbb{R}; M_+(T^*M))$. Il suffit maintenant de prendre $\mu(t,x,\xi) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}(t,x,d\tau,\xi)$, pour conclure la preuve du théorème. □

Nous noterons ϕ_t le flot géodésique sur T^*M. Nous dirons qu'une mesure ν sur T^*M est invariante par le flot géodésique si on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $(\phi_t)_*\nu = \nu$.

Théorème 3.1.3. *Faisons les mêmes hypothèses que celles du théorème précédent. Supposons de plus que* $\|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times M)} = o(h)$. *On a alors :*
(i) Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, *la mesure* $\mu_u(t,.)$ *est invariante par le flot géodésique.*
(ii) Si $a \in C_c^\infty(T^*M)$ *est invariante par le flot géodésique, et* $\tau_h\|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times M)} = o(h)$, *alors on a, pour tout* $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \big\langle Op_h(a)U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\big\rangle = \int_{T^*M} a(x,\xi)\mu_u(0,dx,d\xi).$$

Remarque 3.1.7. *Le second point du théorème est une sorte de théorème d'Egorov faible : il nous dit que, pour des échelles de temps longues, le théorème d'Egorov est encore valable, à condition de se restreindre à la classe des observables invariantes par le flot géodésique. Evidemment, cette classe peut être très restreinte, par exemple si la dynamique géodésique est ergodique.*

Les hypothèses de (ii) ne seront plus vérifiée dans le chapitre suivant, mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big\langle Op_h(a)U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\Big\rangle &= i\tau_h/h\Big\langle\Big[Op_h(a), \frac{h^2}{2}\Delta - V(x)\Big]U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\Big\rangle \\ &= \tau_h\langle Op_h(\xi\cdot\nabla a)U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\rangle \\ &+ i\tau_h/h\langle[Op_h(a), V]U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\rangle\end{aligned} \tag{3.5}$$

La dernière ligne vient de la formule 2.7.

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_h}\int_{\mathbb{R}}\phi'(t)\langle Op_h(a)U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h)dt &= \int_{\mathbb{R}}\phi(t)\langle Op_h(\xi\cdot\nabla a)U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\rangle \\ &+\frac{i}{h}\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\langle[Op_h(a), V(x)]U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\rangle dt,\end{aligned}$$

On prend alors la limite quand $h \longrightarrow 0$ de l'égalité ci-dessus.
On a $\|[Op_h(a), V]\|_{L^2} \leq 2\|Op_h(a)\|_{L^2}\|V\|_{L^\infty} \leq C\|V\|_{L^\infty}$, par le théorème de Calderón Vaillancourt (théorème 2.1.2).
Le second terme du membre de droite tend bien vers 0, par l'hypothèse que nous avons faite sur V. Le membre de gauche tend également vers 0, car $\tau_h \longrightarrow \infty$. On en déduit bien que, pour tout $a \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{T^*M}(\xi\cdot\nabla a)(x,\xi)\mu_u(t, dx, d\xi) = 0$$

ce qui conclut la démonstration de (i).

Pour prouver (ii), considérons un symbole $a \in C_c^\infty(T^*M)$ qui soit invariant par le flot géodésique. On a alors $\xi\cdot\nabla a = 0$. En intégrant 3.5, on obtient :

$$\Big\langle Op_h(a)U_V^h(\tau_h t)u_h, U_V^h(\tau_h t)u_h\Big\rangle - \Big\langle Op_h(a)u_h, u_h\Big\rangle = \frac{i\tau_h}{2h}\int_0^t\Big\langle[Op_h(a), V]U_V^h(\tau_h s)u_h, U_V^h(\tau_h s)u_h\Big\rangle.$$

Par hypothèse, on a $h\tau_h\|[Op_h(a), V]\|_{L^2} = o(1)$; le membre de droite ci-dessus tend donc vers 0 quand $h \longrightarrow 0$. Ceci conclut la preuve du théorème.

□

3.2 Deux résultats révélateurs dans le cas du Tore

Pour découvrir les spécificités de la dynamique sur le tore, nous prendrons $V = 0$ dans cette section.

Nous écrirons ϕ_τ pour le flot géodésique sur $T^*\mathbb{T}^d$, défini par $\phi_\tau(x,\xi) = (x+\tau\xi, \xi)$. Nous noterons Ω l'ensemble des fréquences résonnantes, c'est à dire :

$$\Omega := \{\xi \in \mathbb{R}^d ; \exists k \in \mathbb{Z}^d \backslash 0 \text{ tel que } k \cdot \xi = 0\}.$$

Un vecteur ξ est dans Ω si et seulement si les géodésiques de vitesses ξ sont périodiques. Par conséquent, si $\xi \notin \Omega$, il engendre des géodésiques qui sont denses dans $\mathbb{T}^d$.
Si $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$, nous noterons $\langle a \rangle$ sa moyenne le long des géodésiques. C'est à dire que

$$\langle a \rangle (x,\xi) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\phi_s(x,\xi))ds,$$

où (ϕ_t) est le flot géodésique sur M. Notons que cette fonction est toujours bien définie sur le tore, mais n'est a priori pas continue.

Le premier résultat de ce paragraphe nous dit que, lorsque la mesure semi-classique initiale ne voit pas l'ensemble des fréquences résonantes, alors la mesure semi-classique à des instants ultérieurs est indépendante du temps, et est particulièrement simple.

Proposition 3.2.1. *Soit (u_h) une suite de fonctions bornée dans $L^2(M)$, et h-oscillante. Supposons que $\mu_{u,0}(\mathbb{T}^d \times \Omega) = 0$. Alors, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$, on a :*

$$\int_{T^*\mathbb{T}^d} a(x,\xi)\mu_u(t,dx,d\xi) = \int_{T^*\mathbb{T}^d} \langle a \rangle (x,\xi) \mu_{u,0}(dx,d\xi).$$

Remarque 3.2.1. *En particulier, la mesure semi-classique est alors indépendante du temps.*

Démonstration. Soit $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$. L'hypothèse $\mu_{u,0}(\mathbb{T}^d \times \Omega) = 0$ nous assure que, pour $\mu_{u,0}$-presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\langle a \rangle (x,\xi) = \bar{a}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} a(y,\xi)dy,$$

car la moyenne ne se fait que sur des géodésiques denses.

On peut appliquer le théorème 3.1.3 (ii) à toute fonction $a(\xi)$, et on en déduit que $\int_{\mathbb{T}^d} \mu_u(t,dx,.) = \int_{\mathbb{T}^d} \mu_{u,0}(dx,.)$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{T^*\mathbb{T}^d} \langle a \rangle (x,\xi)\mu_{u,0}(dx,d\xi) &= \int_{T^*\mathbb{T}^d} \bar{a}(\xi)\mu_{u,0}(dx,d\xi) \\
&= \int_{T^*\mathbb{T}^d} \bar{a}(\xi)\mu_u(t,dx,d\xi) \\
&= \int_{T^*\mathbb{T}^d} \langle a \rangle (x,\xi)\mu_u(t,dx,d\xi)
\end{aligned}$$

Or, par le théorème 3.1.3 (i) pour presque tout t, $\mu_u(t)$ est invariante par le flot géodésique. On a donc

$$\int_{T^*\mathbb{T}^d} a(x,\xi)\mu_u(t,dx,d\xi) = \int_{T^*\mathbb{T}^d} \langle a \rangle (x,\xi)\mu_u(t,dx,d\xi)$$

On en déduit l'égalité recherchée.

□

Lorsque la mesure semi-classique initiale voit l'ensemble résonant, la situation est beaucoup moins simple, comme le montre le résultat suivant. Plaçons nous à l'échelle de temps $\tau_h = \frac{1}{h}$.

Proposition 3.2.2. *Soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$. Alors il existe deux suites de fonctions $(u_n), (v_n) \in L^2(\mathbb{T}^d)$ dont les mesures semi-classiques sont*

$$\mu_{u,0}(x,\xi) = \mu_{v,0}(x,\xi) = |\rho(x)|^2 dx\delta_0(\xi),$$

mais telles que leurs limites semi-classiques sont, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\mu_u(t,x,\xi) = |e^{it\Delta/2}\rho|^2(x)dx\delta_0(\xi)et$$

$$\mu_v(t,x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d}\Big(\int_{\mathbb{T}^d}|\rho(y)|^2dy\Big)dx\delta_0(\xi)$$

Remarque 3.2.2. *Il y a deux conclusions à tirer de ce résultat :*
- La mesure semi-classique à un temps $t > 0$ peut dépendre du temps.
- Il n'est pas possible de déduire la mesure semi-classique à un temps $t > 0$ de la mesure semi-classique au temps $t = 0$. Autrement dit, la mesure semi-classique n'est pas déterministe.

L'idée de la preuve est la suivante : on prend simplement u_n constante égale à ρ, ce qui correspond à un état de vitesse nulle, et nous donne bien les μ_u annoncés après quelques calculs.

On construit v_n en ajoutant une perturbation d'ordre $\sqrt{h}$ à la phase, négligeable par rapport à 1, mais grande par rapport à h. Cette perturbation se fait selon une direction irrationnelle (ou du moins, de plus en plus proche d'un irrationnel). La mesure de Wigner ne teste les propriétés d'une fonction dans l'espace des phases qu'à l'échelle h, et donc ne voit pas la perturbation de phase d'ordre $\sqrt{h}$ au temps 0.

Cependant, après un temps $\frac{1}{h}$, la vitesse irrationnelle donnée à v_n permet une moyennisation sur tout le tore, ce qui correspond au résultat annoncé.

Démonstration. Notons $\underline{w}^h_u(t,.) := \underline{w}^h_{e^{it\Delta/2}u_h}$. Commençons par remarque que l'on a, pour une fonction $a(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{-d/2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k(\xi)e^{ik\cdot x}$, l'égalité :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\big(\underline{w}^h_u(t),a\big)dt &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d}\hat{u}(j)\overline{\hat{u}(k)}\hat{a}\Big(j-k,h\frac{k+j}{2}\Big)e^{it(|k|^2-|j|^2)/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{k,j\in\mathbb{Z}^d}\hat{\phi}\Big(\frac{|k|^2-|j|^2}{2}\Big)\hat{u}(k)\overline{\hat{u}(j)}a_{j-k}\Big(\frac{hk+hj}{2}\Big).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Pour définir les suites (u_h) et (v_h), on choisit un $\theta_0 \in \mathbb{R}^d\backslash\Omega$, et (k_n) une suite de $\mathbb{Q}^d$ ayant pour limite θ_0. On supposera que $k_n = \Big(\frac{p^1_n}{q^1_n},...,\frac{p^d_n}{q^d_n}\Big)$, avec p^j_n et q^j_n premiers entre eux. Notons q_n le plus petit multiple commun de $q^1_n,...,q^d_n$, et $\lambda_n := \prod_{i=1}^n q_i$. Comme au moins l'un des coefficients de θ_0 est irrationnel, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\lambda_n = \infty$. On écrira $h_n := 1/(\lambda_n^2)$. Posons

$$S_n(x) := \sqrt{h_n}k_n\cdot x,$$

puis

$$u_{h_n}(x) := \rho(x),$$

$$v_{h_n}(x) := \rho(x)e^{iS(x)/h_n}.$$

Comme $\lambda_n k_n$ est à coefficients entiers, on a :

$$\hat{u}_{h_n}(k) = \rho(k),$$
$$\hat{v}_{h_n}(k) = \rho(k - \lambda_n k_n).$$

Le fait que les mesures semi-classiques associées à u_{h_n} et v_{h_n} soient celles données par la proposition se prouve de la même manière que l'exemple 3.1.2
Calculons la limite de $\underline{w}_{u_n}$. Pour cela, on regarde tout d'abord son action contre des fonctions tests de la forme $a(x,\xi) := a_l(\xi)e^{-il\cdot x}$, avec $a_l \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, et contre $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, avec $\hat{\phi} \in C_c(\mathbb{R})$. On a, par la formule 3.6 :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big(\underline{w}_u^{h_n}(t,\cdot),a\big) = \sum_{j-k=l} \hat{\phi}\Big(\frac{|k|^2-|j|^2}{2}\Big)\hat{u}(k)\overline{\hat{u}(j)}a_l\Big(\frac{h_nk+h_nj}{2}\Big)$$

En prenant la limite $n \longrightarrow \infty$, on a par convergence dominée :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}^d} \phi(t)a(\xi)\mu_u(t,dx,d\xi) = a_l(0)\sum_{j-k=l}\hat{\phi}\Big(\frac{|k|^2-|j|^2}{2}\Big)\hat{\rho}(k)\overline{\hat{\rho}(j)}.$$

Pour une fonction $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$ générale de la forme $a(x,\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} a_l(\xi)e^{-il\cdot x}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}^d} \phi(t)a(x,\xi)\mu_u(t,dx,d\xi) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j-k=l} a_l(0)\hat{\phi}\Big(\frac{|k|^2-|j|^2}{2}\Big)\hat{\rho}(k)\overline{\hat{\rho}(j)}\\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}^d} a(x,0)|e^{it\Delta/2}\rho(x)|^2dx\end{aligned}$$

Calculons maintenant la limite de $\underline{w_{v_n}}$. On a cette fois-ci

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big(\underline{\tilde{w}}_v^h(t),a\big)dt &= \sum_{j-k=l}\hat{\phi}\Big(\frac{l\cdot(k+j)}{2}\Big)\hat{\rho}(k-\lambda_nk_n)\overline{\hat{\rho}(j-\lambda_nk_n)}a_l\Big(\frac{h_nk+h_nj}{2}\Big)\\ &= \sum_{j-k=l}\hat{\phi}\Big(l\cdot\Big(\frac{(k+j)}{2}+\lambda_nk_n\Big)\Big)\hat{\rho}(k)\overline{\hat{\rho}(j)}a_l\Big(\frac{h_nk+h_nj}{2}+\frac{k_n}{\lambda_n}\Big).\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} l\cdot k_n = l\cdot\theta_0$; Par conséquent, si $l \neq 0$, on a pour j,k fixés,

$$\lim_{n\to\infty}\Big|l\cdot\Big(\frac{(k+j)}{2}+\lambda_nk_n\Big)\Big| = \infty$$

Comme $\hat{\phi}$ est à support compact, on en déduit par convergence dominée que, quand $l \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\big(\underline{w}_v^{h_n}(t,\cdot),a\big) = 0.$$

Si $l = 0$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\big(\underline{w}_v^{h_n}(t,\cdot),a\big) &= \lim_{n\to\infty}\hat{\phi}(0)\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|\hat{\rho}(j)|^2a_0(h_nj+\sqrt{h_n}k_n)\\ &= (2\pi)^{-d}\hat{\phi}(0)a_0(0)\|\rho\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat recherché. □

On voudrait étudier des objets semi-classiques déterministes. Ceux-ci doivent être plus compliqués que les mesures semi-classiques, en prenant mieux en compte les phénomènes liés aux directions résonantes. C'est ce que nous allons faire par la suite, grâce à la méthode dite de "deuxième micro-localisation".

Chapitre 4

L'équation de Schrödinger sans paramètre sur le tore

Dans cette section, nous considérerons l'équation de Schrödinger sans paramètre h, et avec un potentiel V, sur le tore plat $\mathbb{T}^d$:

$$i\partial_t \psi = (-\Delta + V)\psi.$$

Comme nous l'avons vu à la remarque 3.1.4, cela correspond à étudier l'équation de Schrödinger avec un paramètre h, à l'échelle de temps $1/h$, et pour des potentiels $\tilde{V} = h^2 V$. Nous oublions le préfacteur $1/2$ devant le Laplacien, pour simplifier les notations.

Notons que les potentiels considérés peuvent dépendre du temps. Comme le paramètre h disparait de l'équation, nous noterons le propagateur $U_V(t)$, ou encore $e^{it\Delta}$ quand le potentiel est nul. Nous noterons parfois $u_h(t,\cdot)$ pour $(U_V(t)u_h)(\cdot)$.

Nous ferons dans un premier temps l'hypothèse que $V \in C^\infty(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$. Nous généraliserons ensuite certains de nos résultats à des potentiels moins réguliers dans la section 4.6 .

Toutes les méthodes que nous présenterons fonctionnent sur des tores rationnels, c'est à dire tels que le rapport des côtés est un nombre rationnel. Pour des tores irrationnels, certains des résultats restent vrais, mais les méthodes de preuve ne sont pas tout à fait les mêmes. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article [AFKM11] pour le cas d'un tore quelconque, avec un opérateur de Schrödinger plus général.

Les deux résultats les plus importants de ce chapitre sont le théorème 4.1.1, que nous allons présenter dans la section suivante, et le théorème 4.5.1, qui traite de l'évolution des mesures semi-classiques en fonction du temps. Ce théorème ne sera énoncé que dans la section 4.4, car il nous faut auparavant introduire quelques définitions.

4.1 Questions de régularité

Estimées de Strichartz En raison de son caractère dispersif, l'équation de Schrödinger possède des propriétés régularisantes. Dans $\mathbb{R}^d$, ces propriétés se traduisent en termes d'estimations de Strichartz. Ce sont des inégalités de la forme

$$\|e^{it\Delta/2}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.1}$$

pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et pour

$$p = 2 + \frac{4}{d}. \tag{4.2}$$

Ces inégalités nous disent qu'une solution de l'équation de Schrödinger est plus régulière que ce à quoi on pourrait s'attendre en regardant simplement la condition initiale. Elles sont essentielles pour comprendre la version non linéaire de l'équation de Schrödinger, dans laquelle on ajoute un terme en $|\psi|^q\psi$ à l'équation.

Une telle inégalité est-elle encore vraie sur le tore ? Ceci est impossible, car il y a des solutions périodiques en temps à l'équation de Schrödinger sur le tore. Il n'est donc pas possible d'obtenir une estimée comme 4.1, dans laquelle on intègre sur tous les temps réels.

On peut alors chercher à obtenir une estimées de Strichartz locales en temps, c'est à dire une inégalité de la forme :

$$\|e^{it\Delta/2}u_0\|_{L^p([0,1]_t\times\mathbb{R}^d_x)} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.3}$$

Remarquons que l'on peut évidemment remplacer $[0,1]$ dans 4.3 par n'importe quel segment inclus dans $\mathbb{R}$.

Un tel résultat est-il vrai ? Bourgain a montré qu'il ne pouvait pas être vrai pour les exposants donnés par 4.2 ([Bou93]),[Bou07]). Cependant, Zygmund a montré ([Zyg74]) que l'inégalité 4.3 était vraie pour $d = 1$ et $p = 4$. Pour $d \geq 2$, Bourgain ([Bou93]) a conjecturé que l'inégalité 4.3 était vraie pour un $p > 2$.

Absolue continuité L'un des résultats principaux de ce chapitre va dans le sens de cette conjecture de Bourgain. En effet, si cette conjecture est vraie, et si on prend une suite de conditions initiales (u_n) bornée dans L^2, alors la suite des $U(t)u_n$ sera dans un L^p pour $p > 2$ et pour presque tout t. En particulier, si on regarde les densités associées $|U(t)u_n|^2$, elles formeront pour presque tout t une suite bornée dans un L^q, pour $q = \frac{p}{2} > 1$. On pourra donc extraire une sous-suite qui converge faiblement, et la limite sera dans L^q. En particulier, la limite sera absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est la philosophie du résultat suivant.

Théorème 4.1.1. *Soit (u_h) une suite bornée dans $L^2(\mathbb{T}^d)$, et soit μ_u une mesure semi-classique dépendant du temps associée. Alors, pour presque tout t, $\int_{\mathbb{R}^d} \mu(t,\cdot,d\xi)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$.*

Remarque 4.1.1. *On peut montrer qu'un tel résultat est faux sur la sphère. On en déduit qu'il n'y a pas d'estimées de type Strichartz sur la sphère. Pour plus de détails sur les propriétés de régularité des mesures semi-classiques sur différentes variétés, et le lien avec les estimées de Strichartz, nous invitons le lecteur à lire l'article [AM11a].*

Une autre manière d'énoncer ce résultat est d'utiliser la définition suivante.

Définition 4.1.1. *Soit $T > 0$ et (v_n) une suite bornée dans $L^2(]0;T[\times\mathbb{T}^d)$. On dit que (v_n) vérifie la propriété (AC_T) si toute limite faible-* de la suite de mesures $(|v_n|^2dtdx)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,T[\times\mathbb{T}^d$.*

Corollaire 4.1.1. *Soit (u_n) une suite de fonctions bornée dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. Alors la suite des $(U_V(t)u_n)$ vérifie (AC_T) pour tout $T > 0$.*

Preuve que le théorème implique le corollaire. Soit (u_n) une suite de fonctions bornées dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. On peut trouver une suite (h_n) tendant vers 0 telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d, \|k\|\leq h_n^{-1}} |\hat{u}_n(k)|^2 = 1. \tag{4.4}$$

Cela revient à trouver une échelle (h_n) telle que (u_n) est (h_n)-oscillante.

On pose alors

$$\tilde{u}_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d, \|k\|\leq h_n^{-1}} \hat{u}_n(k) \frac{eik\cdot x}{(2\pi)^{d/2}}.$$

L'équation 4.4 implique que $w_{u_n}^{h_n}$ et $\tilde{w}_{u_n}^{h_n}$ ont la même limite μ.

Notons ν une limite faible-* de la suite des $(|U_V(t)|^2 dtdx)$.

Comme μ est la limite semi-classique des $\tilde{w}_{u_n}^{h_n}$, qui a son support sur $\mathbb{T}^d \times B(0,1)$, il n'y a pas de perte de masse à l'infini. On peut donc en déduire que

$$\nu(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(t,x,d\xi).$$

Donc ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$ pour presque tout t.

L'absolue continuité en temps découle du théorème 3.1.2. □

Le corollaire 4.1.1 a été prouvé dans le cas $V = 0$ par Zygmund ([Zyg74]) dans le cas $d = 1$, puis pour $V = 0$, mais d quelconque, par Bourgain ([Bou97]). La méthode utilisée est d'étudier de manière fine l'intersection d'un paraboloïde avec un réseau. Dans un article récent, Burq ([Bur12]) montre comment passer du résultat sans potentiel à un résultat avec un potentiel peu régulier. Nous présenterons sa méthode dans le paragraphe 4.6.1.

Les techniques présentées ici sont très différentes, car elles consistent à comprendre comment les mesures de Wigner se concentrent sur les directions résonantes. Elles nous permettront également d'obtenir une loi de propagation pour la distribution de Wigner.

Uniforme Intégrabilité Nous proposons une conjecture intermédiaire entre la conjecture de Bourgain et le corollaire 4.1.1.

Définition 4.1.2. *Soit $T > 0$, et soit (v_n) une suite bornée dans $L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)$. Nous dirons que (v_n) vérifie l'hypothèse (UI_T) si la suite des $(|v_n|^2)$ est uniformément intégrable.*

Autrement dit, $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall A \subset [0,T]\times\mathbb{T}^d$ mesurable, si $|A| < \delta$, alors $\int_A |v_n|^2 < \epsilon$. On utilise parfois le terme d'équi-intégrabilité plutôt que celui d'uniforme intégrabilité.
Le théorème de Dunfort-Pettis nous dit que cette condition est équivalente à l'existence d'une sous-suite convergente pour la topologie faible de L^1.

La conjecture suivante, notée **(U)**, est strictement moins forte que celle de Bourgain, et est la condition naturelle permettant de généraliser certains des résultats qui vont suivre au cas de potentiels peu réguliers.

(U) : Pour toute suite (u_n) normalisée dans $L^2(\mathbb{T}^d)$, et pour tout $T > 0$, la suite des $v_n = e^{it\Delta}u_n$ vérifie l'hypothèse (UI_T).

Pour des résultats de régularité d'un autre genre, nous renvoyons le lecteur à [AJM12], où les auteurs obtiennent plus de sommabilité pour les coefficients de Fourier des solutions de l'équation de Schrödinger sans potentiel.

4.2 Décomposition d'une mesure invariante

Ce que nous devons retenir des résultats de la section 3.2, c'est que la dynamique de Schrödinger sur le tore est compliquée en raison des directions résonnantes. Nous devons donc dans un premier temps décrire précisément cet ensemble résonnant, et la manière donc une mesure invariante peut se décomposer sur ces directions résonnantes. Nous appliquerons ensuite ces résultats aux mesures semi-classiques.

Nous dirons qu'un sous-module Λ de $\mathbb{Z}^d$ est primitif si on a $\langle\Lambda\rangle \cap \mathbb{Z}^d = \Lambda$, où $\langle\Lambda\rangle$ désigne l'espace vectoriel engendré par Λ. Nous noterons $\mathscr{L}$ l'ensemble des sous-modules primitifs de $\mathbb{Z}^d$.

Nous noterons

$$\Lambda^\perp := \{\xi \in \mathbb{R}^d; \xi \cdot k = 0, \forall k \in \Lambda\},$$

$$\mathbb{T}_\Lambda := \langle\Lambda\rangle / 2\pi\Lambda, et$$

$$\mathbb{T}_{\Lambda^\perp} := \Lambda^\perp / (2\pi\mathbb{Z}^d \cap \Lambda^\perp)$$

Nous noterons également $\Lambda_\xi := \{k \in \mathbb{Z}^d; k \cdot \xi = 0\}$, et

$$\Omega_j := \{\xi \in \mathbb{R}^d; rg(\Lambda_\xi) = d - j\}.$$

Les Ω_j forment une partition de $\mathbb{R}^d$. On a $\Omega = \bigcup_{j=0}^{d-1} \Omega_j$. On dit que $\Omega_d = \mathbb{R}^d \backslash \Omega$ est l'ensemble des vecteurs non résonnants. Ecrivons aussi :

$$R_\Lambda := \Lambda^\perp \cap \Omega_{d-rg(\Lambda)}.$$

Remarquons qu'un vecteur ξ est dans R_Λ si et seulement si la géodésique partant de 0 avec une vitesse ξ est dense dans $\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}$.

Les R_Λ forment une partition de $\mathbb{R}^d$. On en déduit le résultat suivant.

Lemme 4.2.1. *Soit μ une mesure de Radon finie et positive sur $T^*\mathbb{T}^d$. Alors μ se décompose en une somme de mesures de Radon finies positives :*

$$\mu = \sum_{\Lambda \in \mathscr{L}} \mu_{|\mathbb{T}^d \times R_\Lambda}$$

Etant donnée une mesure $\mu \in \mathscr{M}_+(T^*\mathbb{T}^d)$, on définit ses coefficients de Fourier comme étant les mesures complexes sur $\mathbb{R}^d$:

$$\hat{\mu}(k, \cdot) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{-ik\cdot x}}{(2\pi)^{d/2}} \mu(dx, \cdot), \ k \in \mathbb{Z}^d.$$

On a alors, au sens des distributions :

$$\mu(x, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}(k, \xi) \frac{e^{ik.x}}{(2\pi)^{d/2}}.$$

Si $\mu \in \mathscr{M}_+(T^*\mathbb{T}^d)$ et $\Lambda \in \mathscr{L}$, nous noterons

$$\langle\mu\rangle_\Lambda(x,\xi) := \sum_{k\in\Lambda} \hat{\mu}(k,\xi)\frac{e^{ik.x}}{(2\pi)^{d/2}}.$$

C'est la moyenne de μ sur les positions $x + \Lambda^\perp$.

Lemme 4.2.2. *La distribution $\langle\mu\rangle$ est une mesure de Radon positive sur $T^*\mathbb{T}^d$.*

Démonstration. Soit $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$. On a :

$$a(x,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{a}(k,\xi)\frac{e^{ik.x}}{(2\pi)^{d/2}}.$$

Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une base de $\Lambda^\perp$.
Notons

$$\langle a\rangle_\Lambda(x,\xi) := \lim_{T_1,...,T_n\longrightarrow\infty} \frac{1}{T_1...T_n}\int_0^{T_1} ... \int_0^{T_n} a\Big(x + \sum_{j=1}^n t_j v_j, \xi\Big).$$

On vérifie sans peine que cette limite existe.

Remarquons d'une part que l'on a :

$$\langle a\rangle_\Lambda(x,\xi) = \sum_{k\in\Lambda} \hat{a}(k,\xi)\frac{e^{ik.x}}{(2\pi)^{d/2}},$$

et donc

$$\big(\langle\mu\rangle_\Lambda, a\big) = \int_{T^*\mathbb{T}^d} \langle a\rangle_\Lambda(x,\xi)\mu(dx,d\xi).$$

D'autre part, on déduit immédiatement de la définition de $\langle a\rangle$ que $\langle a\rangle \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$, que $\|\langle a\rangle_\Lambda\|_{L^\infty(T^*\mathbb{T}^d)} \leq \|a\|_{L^\infty(T^*\mathbb{T}^d)}$, et que $\langle a\rangle_\Lambda$ est positive dès que a l'est.
Ces trois propriétés suffisent à caractériser une mesure de Radon finie positive. $\square$

Rappelons qu'une mesure $\mu \in \mathscr{M}_+(T^*\mathbb{T}^d)$ est dite invariante par le flot géodésique si, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$(\phi_\tau)_*\mu = \mu.$$

Sur le tore, le flot géodésique a une expression particulièrement simple : $\phi_\tau(x,\xi) = (x + \tau\xi, \xi)$.
Nous savons, par le théorème 3.1.3, qu'une mesure semi-classique est invariante par le flot géodésique.
Le lemme suivant nous dit que c'est encore le cas pour toutes les mesures de la décomposition 4.2.1.
Nous pourrons donc étudier l'évolution de chacune de ces mesures indépendamment.

Lemme 4.2.3. *Soit μ une mesure positive invariante par le flot géodésique sur $T^*\mathbb{T}^d$. Alors tous les termes dans la décomposition du lemme 4.2.1 sont des mesures positives invariantes, et on a*

$$\mu_{|\mathbb{T}^d\times R_\Lambda} = \langle\mu\rangle_{\Lambda|\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}. \tag{4.5}$$

Démonstration. L'invariance des mesures $\mu_{|\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}$ découle de l'invariance de μ. Pour montrer l'égalité 4.5, il nous faut montrer que si $k\notin\Lambda$, alors $\hat{\mu}(k,.)_{|R_\Lambda}=0$. Mais l'équation $(\phi_t)_*\mu=\mu$ est équivalente à l'équation, au sens des distributions :

$$\xi\cdot\nabla_x\mu(x,\xi)=0,\ \text{soit, par transformée de Fourier}$$

$$i(k\cdot\xi)\hat{\mu}(k,\xi)=0,\quad\forall k\in\mathbb{Z}^d.$$

On a donc

$$\mathrm{spt}\hat{\mu}(k,\cdot)\subset\{\xi\in\mathbb{R}^d;k\cdot\xi=0\}.$$

Or, par définition, $R_\Lambda\cap\{\xi\in\mathbb{R}^d;k\cdot\xi=0\}\neq\emptyset$ si et seulement si $k\in\Lambda$. Le lemme en découle. □

Remarque 4.2.1. *Si $v\in\mathbb{R}^d$, on notera $\tau^v:T^*\mathbb{T}\longrightarrow T^*\mathbb{T}$ la translation :*

$$\tau^v(x,\xi)=(x+v,\xi).$$

La preuve du lemme précédent montre que l'on a

$$\mu_{|\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}=\langle\mu\rangle_{\Lambda|\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}$$

si et seulement si on a

$$\forall v\in\Lambda^\perp,\quad\tau^v_*\mu_{|\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}=\mu_{|\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}$$

4.3 Deuxième micro-localisation sur un espace affine résonnant

Dans cette section, nous allons mieux comprendre chacun des termes de la décomposition du lemme 4.2.1, en réalisant une "deuxième micro-localisation sur la direction $\Lambda^\perp$". L'idée est que l'on coupe les mesures de Wigner w_u^h en deux parties : l'une se concentre très vite en la variable ξ sur la direction Λ quand $h\longrightarrow 0$, l'autre reste assez éloignée de cette direction. En passant à la limite, on obtient deux objets assez différents, mais possédant tous deux de bonnes propriétés d'invariance et/ou de régularité. On peut alors en déduire des propriétés de régularité sur les $\mu_u|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}$, et une loi de propagation.

En fait, ceci ne prouve les résultats recherchés que dans le cas où $d=2$. Pour prouver l'analogue de ces résultats en dimension supérieure, il nous faut effectuer des "deuxièmes micro-localisations successives". Les notations sont alors beaucoup plus lourdes, mais les idées sont les mêmes. Nous traiterons du cas $d>2$ dans la section suivante.

Si Λ est un sous-module primitif de $\mathbb{Z}^d$, nous noterons P_Λ la projection orthogonale sur la direction $\langle\Lambda\rangle$.

Pour comprendre la façon dont les mesures de Wigner se concentrent sur une direction $\langle\Lambda\rangle$, nous les ferons agir sur l'espace de fonctions suivant.

Définition 4.3.1. *Soit $\Lambda\in\mathscr{L}$. Nous noterons S^1_Λ l'ensemble des fonctions $a(x,\xi,\eta)$ sur $T^*\mathbb{T}^d\times\langle\Lambda\rangle$ qui vérifient :*
(i) a est à support compact en les variables $(x,\xi)\in T^*\mathbb{T}^d$.
(ii) a est homogène de degré 0 à l'infini par rapport à la variable $\eta\in\langle\Lambda\rangle$. C'est à dire qu'il existe un $R_0>0$ et une fonction $a_\infty\in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d\times\mathbb{S}\langle\Lambda\rangle)$ telle que, pour $|\eta|>R_0$ et $(x,\xi)\in T^*\mathbb{T}^d$, on a :

$$a(x,\xi,\eta)=a_\infty\Big(x,\xi,\frac{\eta}{|\eta|}\Big).$$

(iii) a n'a des modes de Fourier pour la variable x qu'en la direction Λ. C'est à dire que

$$a(x,\xi,\eta) = \sum_{k\in\Lambda} \hat{a}_k(\xi,\eta)\frac{e^{ik.x}}{(2\pi)^{d/2}}.$$

On considérera la "distribution de Wigner" agissant sur $\mathcal{S}^1_\Lambda$ par

$$\big(\tilde{w}^h_u(t),a\big) := \int_{T^*\mathbb{T}^d} a(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h})w^h_u(t)(dx,d\xi)$$

Remarquons que le point (iii) de la définition précédente nous est dicté par le lemme 4.2.3 : on peut se limiter aux fonctions dont les coefficients de Fourier en x sont selon la direction $\langle\Lambda\rangle$.
Soit $\chi \in C^\infty_c(\langle\Lambda\rangle)$ une fonction de troncature positive, identiquement égale à un près de l'origine, et nulle en dehors de la boule unité. Si $a \in S^1_\Lambda, R > 1$, on décompose a en $a(x,\xi,\eta) = a_1(x,\xi,\eta) + a_2(x,\xi,\eta)$, où :

$$a_1(x,\xi,\eta) := a(x,\xi,\eta)\Big(1-\chi\Big(\frac{\eta}{R}\Big)\Big)$$

$$a_2(x,\xi,\eta) := a(x,\xi,\eta)\chi\Big(\frac{\eta}{R}\Big)$$

Ceci nous permet de décomposer la distribution de Wigner en deux parties :

$$\tilde{w}^h_u(t) = w^{h,\Lambda}_{u,R}(t) + w^h_{u,\Lambda,R}(t)$$

où

$$\big(w^{h,\Lambda}_{u,R}(t),a\big) := \int_{T^*\mathbb{T}^d} a_1(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h})w^h_u(t)(dx,d\xi)$$

$$\big(w^h_{u,\Lambda,R}(t),a\big) := \int_{T^*\mathbb{T}^d} a_2(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h})w^h_u(t)(dx,d\xi).$$

Le premier terme concerne w^h_u à des fréquences telles que $|P_\Lambda(\xi)| \geq Rh$, tandis que le second correspond à $|P_\Lambda(\xi)| \leq Rh$.

Nous voulons analyser le comportement asymptotique quand $h \to 0$ de w^h_u en séparant le comportement lorsque ξ est à une distance de $\Lambda^\perp$ grande devant h, et lorsque cette distance est de l'ordre de h ou plus petite. Il nous faut donc étudier chacun des termes ci-dessus en prenant successivement les limites $h \longrightarrow 0^+$ et $R \longrightarrow +\infty$.

Le théorème de Calderón-Vaillancourt nous assure que $w^{h,\Lambda}_{u,R}$ et $w^h_{u,\Lambda,R}$ sont bornées dans $L^\infty(\mathbb{R};(\mathcal{S}^1_\Lambda)')$. Le théorème de Banach-Alaoglu nous donne alors le résultat suivant.

Proposition 4.3.1. *Quitte à extraire des sous-suites, il existe $\tilde{\mu}^\Lambda_u$ et $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$ dans $L^\infty(\mathbb{R};(\mathcal{S}^1_\Lambda)')$ telles que, $\forall\phi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\forall a \in \mathcal{S}^1_\Lambda$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big(\tilde{\mu}^\Lambda_u(t,.),a\big)dt := \lim_{R\longrightarrow\infty}\lim_{h\longrightarrow 0}\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big(w^{h,\Lambda}_{u,R}(t),a\big)dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big(\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,.),a\big)dt := \lim_{R\longrightarrow\infty}\lim_{h\longrightarrow 0}\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big(w^h_{u,\Lambda,R}(t),a\big)dt$$

Dans ce qui précède, on a ajouté une variable auxiliaire η. Pour retrouver des informations sur μ_u, il nous faut intégrer sur toutes les valeurs possibles de cette variable η. Notons

$$\mu_u^\Lambda(t,\cdot) := \int_{\langle\Lambda\rangle} \tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot,d\eta)|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}$$

$$\mu_{u,\Lambda}(t,\cdot) := \int_{\langle\Lambda\rangle} \tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,\cdot,d\eta)|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}.$$

La décomposition $\tilde{w}_u^h(t) = w_{u,R}^{h,\Lambda}(t) + w_{u,\Lambda,R}^h(t)$ nous donne :

Proposition 4.3.2. *Pour presque tout t, $\mu_u^\Lambda(t,\cdot)$ et $\mu_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ vérifient :*

$$\mu_u(t,\cdot)|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda} = \mu_u^\Lambda(t,\cdot) + \mu_{u,\Lambda}(t,\cdot).$$

Démonstration. Soit $b \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$. Notons $\tilde{b}$ la fonction définie par $\tilde{b}(x,\xi,\eta) = b(x,\xi)$. On a bien $\tilde{b} \in \mathcal{S}_\Lambda^1$, et :

$$\begin{aligned}\big(w_u^h(t), b\big) &= \big(\tilde{w}_u^h(t)\tilde{b}big)\\ &= \big(w_{u,R}^{h,\Lambda}(t) + w_{u,\Lambda,R}^h(t), \tilde{b}\big),\end{aligned}$$

puis, par passage à la limite,

$$\begin{aligned}\big(\mu_u(t)|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}, b\big) &= \big(\tilde{\mu}_u^\Lambda(t) + \tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t), \tilde{b}\big)\\ &= \big(\mu_u^\Lambda(t) + \mu_{u,\Lambda}(t), b\big)\end{aligned}$$

car b ne dépend pas de η. □

Pour comprendre le comportement de $\mu|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}$, nous allons donc nous intéresser aux propriétés de $\tilde{\mu_u^\Lambda}$ et de $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$. Ces deux distributions ont un comportement très différent, mais sont toutes deux régulières, en un sens précisé par les résultats suivants.
Si $(x,\xi,\eta) \in T^*\mathbb{T}^d \times (\langle\Lambda\rangle\backslash\{0\})$ et $s \in \mathbb{R}$

$$\phi_s^0(x,\xi,\eta) := (x + s\xi, \xi, \eta)$$

$$\phi_s^1(x,\xi,\eta) := \Big(x + s\frac{\eta}{|\eta|}, \xi, \eta\Big)$$

Lemme 4.3.1. *$\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ et $\tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot)$ sont invariantes par l'action de ϕ_s^0 pour presque tout t : $\forall s \in \mathbb{R}$*

$$(\phi_s^0)_*\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,\cdot) = \tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,\cdot)$$

$$(\phi_s^0)_*\tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot) = \tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot)$$

Démonstration. Soit $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$. On a

$$\frac{d}{dt}\big(w_u^h(t), a\big) = i\Big\langle u_h(t,\cdot), \Big[-\frac{1}{2}\Delta + V(t,\cdot), Op_h(a)\Big]u_h(t,\cdot)\Big\rangle.$$

En utilisant la formule 2.7, on a

$$\frac{d}{dt}\big(w_u^h(t), a\big) = \frac{1}{h}\big(w_u^h(t), \xi\cdot\nabla a\big) + \big(\mathcal{L}_V^h(t), a\big) \tag{4.6}$$

où

$$\big(\mathcal{L}_V^h(t), a\big) := i\langle u_h(t,\cdot), [V(t,\cdot), Op_h(a)]u_h(t,\cdot)\rangle.$$

Cette quantité est bornée uniformément en h quand t varie sur un compact. On peut donc multiplier par h et intégrer l'équation 4.6 contre une fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big(w_u^h(t), \xi \cdot \nabla a\big) = -h \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)\big(w_u^h(t), a\big) + h \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big(\mathcal{L}_V^h(t), a\big).$$

On remplace alors dans cette égalité a par $a_1(x, \xi, \frac{P_\Lambda(\xi)}{h})$ et $a_2(x, \xi, \frac{P_\Lambda(\xi)}{h})$, et on passe aux limites $h \longrightarrow 0$ et $R \longrightarrow \infty$. On en déduit que

$$\big(\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,\cdot), \xi \cdot \nabla\big) = \langle \tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot), \xi \cdot \nabla a\big) = 0,$$

ce qui est le résultat recherché. □

Corollaire 4.3.1. *Pour presque tout t, $\mu_u^\Lambda(t,\cdot)$ et $\mu_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ sont invariantes par le flot géodésique.*

Théorème 4.3.1. *[Propriétés de $\tilde{\mu}_u^\Lambda$] Pour presque tout t, il existe $M^\Lambda(t,\cdot)$ une distribution sur $T^*\mathbb{T}^d \times \mathbb{S}_{\langle\Lambda\rangle}$ telle que, pour tout $a \in S_\Lambda^1$, on a*

$$\big(\tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot), a\big)_{S_\Lambda^1} = \big(M^\Lambda, a_\infty\big)_{\mathcal{D}'(T^*\mathbb{T}^d \times \mathbb{S}_{\langle\Lambda\rangle})}.$$

On identifiera par la suite $\tilde{\mu}_u^\Lambda$ à M^Λ.

De plus, on a pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\big(\phi_s^1\big)_* \tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot) = \tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot)$$

Théorème 4.3.2 (Propriétés de $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$)**.** *Pour presque tout t, $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ a son support sur $\mathbb{T}^d \times \Lambda^\perp \times \langle\Lambda\rangle$, et sa projection sur $\mathbb{T}^d$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

De plus, $\mu_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ est une mesure positive sur $T^*\mathbb{T}^d$.

Remarque 4.3.1. *Comme pour presque tout t, $\mu_u(t,\cdot)|_{\mathbb{T}^d \times R_\Lambda} = \mu_u^\Lambda(t,\cdot) + \mu_{u,\Lambda}(t,\cdot)$, on en déduit que $\mu_u^\Lambda(t,\cdot)$ est également une mesure de Radon sur $T^*\mathbb{T}^d$.*

On peut en fait montrer que M^Λ est une mesure positive. Le lecteur intéressé peut lire une idée de preuve dans [AM11b]. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat dans la suite.

Preuve du théorème 4.1.1 en dimension 2 Avant de rentrer dans les détails de la preuve de ces théorèmes, nous allons montrer comment ils permettent de prouver le théorème 4.1.1 en dimension 2.

Pour presque tout t, on décompose μ_u comme

$$\mu_u = \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}} (\mu_u^\Lambda(t,\cdot) + \mu_{u,\Lambda}(t,\cdot)).$$

Or, par le théorème 4.3.2, la projection du second terme sur $\mathbb{T}^d$ est absolument continue.

Quant au premier terme, il faut distinguer trois cas possibles.

- Si $\Lambda = \{0\}$, alors $w_{u,R}^{h,\Lambda} = 0$, et donc $\mu_u^\Lambda = 0$.

-Si $\langle\Lambda\rangle$ est de dimension 1, la loi de propagation du théorème 4.3.1 qui nous donne la régularité désirée. En effet, on a $\left(\phi_s^1\right)_* \tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot) = \tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot)$, et donc

$$(\tau^{sv})_* \tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot)|_{\mathbb{T}^d \times R_\Lambda \times \langle\Lambda\rangle} = \tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot)_{\mathbb{T}^d \times R_\Lambda \times \langle\Lambda\rangle}, \tag{4.7}$$

pour tout $v \in \langle\Lambda\rangle$, $\|v\| = 1$ et tout $s \in \mathbb{R}$.

D'autre part, l'équation 4.5 nous dit que 4.7 est encore valable pour $v \in \Lambda^\perp$. On en déduit qu'elle est vraie pour tout $v \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent, la mesure $\tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot)|_{\mathbb{T}^d \times R_\Lambda \times \langle\Lambda\rangle}$ est constante en $x \in \mathbb{T}^d$.

- Enfin, si $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, l'équation 4.7 est vraie pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, donc la mesure $\tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot)|_{\mathbb{T}^d \times R_\Lambda \times \langle\Lambda\rangle}$ est constante en $x \in \mathbb{T}^d$, ce qui conclut la preuve du théorème en dimension 2.

En dimension plus grande, la preuve précédente ne marche pas, car on n'a pas $\mathbb{Z}^d = R_\Lambda + \Lambda^\perp$, il faut ajouter à la somme des espaces résonnants de dimension plus petites. Nous ferons cela par des deuxièmes micro-localisations successives. Dans [Mac10], l'absolue continuité est prouvée dans le cas de la dimension 2 uniquement avec ces méthodes. C'est dans [AM11b] que les deuxièmes micro-localisations successives sont employées pour généraliser aux dimensions supérieures.

4.3.1 Propriétés de $\tilde{\mu}_u^\Lambda$

Nous nous proposons ici de prouver le théorème 4.3.1.
Soit $a \in S_\Lambda^1$. Il existe $R_0 > 0$ et $a_\infty \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d \times \mathbb{S}_{\langle\Lambda\rangle})$ telle que

$$a(x,\xi,\eta) = a_\infty\Big(x,\xi,\frac{\eta}{|\eta|}\Big),$$

dès que $|\eta| \geq R_0$. Par conséquent, pour R assez grand, la valeur de $(w_{u,h,R}^\Lambda, a)$ ne dépend que de a_∞. On en déduit que $\tilde{\mu}_u^\Lambda$ peut être identifié à un élément du dual de $C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d \times \mathbb{S}_{\langle\Lambda\rangle})$.

Montrons maintenant la propriété d'invariance. Soit $a \in \mathcal{S}_\Lambda^1$. Remarquons que, comme a n'a de modes de Fourier en la variable x que selon la direction $\langle\Lambda\rangle$, on a :

$$\frac{\xi}{h}.\nabla a_1\Big(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h}\Big) = \frac{P_\Lambda(\xi)}{h}.\nabla a_1\Big(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h}\Big).$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Comme a_1 s'annule quand η est proche de 0, on a, par l'équation 4.6 :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\langle w_{u,R}^{h,\Lambda}, \frac{\eta}{|\eta|}.\nabla a_1\rangle dt = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(t)\langle w_{u,R}^{h,\Lambda}, \frac{1}{|\eta|}a_1\rangle dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\langle \mathcal{L}_V^h(t), \frac{1}{|\eta|}a_1\rangle dt. \tag{4.8}$$

On pose $\eta = r\omega$, avec $r > 0$ et $\omega \in \mathbb{S}\langle\Lambda\rangle$. On écrit également $b^R(x,\xi,\eta) := \frac{1}{|\eta|}a_1(x,\xi,\eta)$. Pour R assez grand, on a :

$$b^R(x,\xi,\eta) = \frac{1}{r}\Big(1-\chi\Big(\frac{r\omega}{R}\Big)\Big)a_\infty(x,\xi,\omega).$$

Ecrivons alors $B_{h,R}^\Lambda = Op_h\Big(b^R\Big(x,\xi,\frac{\eta}{h}\Big)\Big)$. Comme b^R est homogène de degré -1 en η, on déduit du théorème de Calderón-Vaillancourt qu'il existe une constante C telle que

$$\limsup_{h\to 0} \|B_{h,R}^\Lambda\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^d))} \leq C/R.$$

Donc

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\phi'(t)\langle w^{h,\Lambda}_{u,R},\frac{1}{|\eta|}a_1\rangle dt = 0.$$

et

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0}\langle \mathcal{L}^h_V(t),\frac{1}{|\eta|}a_1\rangle &\leq C\limsup_{h\to 0}\|[V,B^{\Lambda}_{h,R}]\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^d))}\\ &\leq \frac{C'}{R}\|V\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\end{aligned}$$

On peut alors faire tendre h vers 0 et R vers ∞ dans 4.8, pour obtenir, pour presque tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\omega\cdot\nabla_x\tilde{\mu}^{\Lambda}_u(t,x,\xi,\omega)=0.$$

Ce qui est bien équivalent au résultat recherché.

4.3.2 Propriétés de $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$

Nous allons maintenant nous intéresser à la mesure $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$, qui contient les propriétés de μ micro-localement près de $\Lambda^\perp$.

Géométrie des sous-tores Dans ce paragraphe, nous allons comprendre comment on peut décomposer le tore $\mathbb{T}^d$ en "le produit de $\mathbb{T}_\Lambda$ et de $\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}$". En particulier, cela permettra d'identifier une fonction sur $\mathbb{T}^d$ dont tous les modes de Fourier sont selon Λ à une fonction sur $\mathbb{T}_\Lambda$.

On écrira $L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d)\subset L^2(\mathbb{T}^d)$ pour l'ensemble des fonctions qui n'ont des modes de Fourier que selon Λ.

On a l'isomorphisme

$$\chi_\Lambda : \begin{cases}\Lambda^\perp\times\langle\Lambda\rangle\longrightarrow\mathbb{R}^d\\ \quad(x,y)\longmapsto x+y\end{cases}$$

On notera $\tilde{\chi}_\Lambda : T^*\Lambda^\perp\times T^*\Lambda\longrightarrow T^*\mathbb{R}^d$ la transformation canonique induite sur les espaces cotangents. En identifiant $T^*\mathbb{R}^d$ à $\mathbb{R}^{2d}$, celle-ci s'écrit $\tilde{\chi}_\Lambda(s,\sigma,y,\eta)=(s+y,\sigma+\eta)$.

L'application χ_Λ passe au quotient, et l'application

$$\pi_\Lambda : \begin{cases}\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times\mathbb{T}_\Lambda\longrightarrow\mathbb{T}^d\\ \quad(x,y)\longmapsto x+y\end{cases}$$

est une surjection, et un morphisme de groupes. Cependant, cette application n'est pas injective : 0 peut avoir plus d'un antécédent. Notons p_Λ le nombre d'antécédents de 0. On a un recouvrement de $\mathbb{T}^d$ de degré p_Λ.

On écrira $\tilde{\pi}_\Lambda : T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times T^*\mathbb{T}_\Lambda\longrightarrow T^*\mathbb{T}^d$ la transformation canonique induite sur les espaces cotangents.

On définit maintenant un isomorphisme $T_\Lambda : L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)\longrightarrow L^2_{loc}(\Lambda^\perp\times\langle\Lambda\rangle)$ par

$$T_\Lambda u := \frac{1}{\sqrt{p_\Lambda}}(u\circ\chi_\Lambda).$$

Le facteur $p_\Lambda^{-1/2}$ fait que T_Λ est une isométrie de $L^2(\mathbb{T}^d)$ vers un sous-espace de $L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp} \times \mathbb{T}_\Lambda)$. De plus, si $u \in L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d)$, alors, pour tout $y \in \mathbb{T}_{\Lambda^\perp}$, on a

$$T_\Lambda u(y,z) = \frac{1}{\sqrt{p_\Lambda}} u(y). \tag{4.9}$$

Par conséquent, T_Λ envoie $L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d)$ dans $L^2(\mathbb{T}_\Lambda)$.
L'application $\tilde{\chi}_\Lambda$ étant linéaire, on a pour tout $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$:

$$T_\Lambda Op_h(a) = Op_h(a \circ \tilde{\chi}_\Lambda) T_\Lambda. \tag{4.10}$$

Ecrivons $Op_h^{\Lambda^\perp}$ et Op_h^Λ les quantifications de Weyl qui agissent toutes deux sur les fonctions $C_c^\infty(T^*\Lambda^\perp \times T^*\langle\Lambda\rangle)$, et qui agissent respectivement sur les variables de $T^*\Lambda^\perp$ et de $T^*\langle\Lambda\rangle$, laissant les autres variables inchangées. Remarquons que l'on a formellement, pour tout $a \in C_c^\infty(T^*\Lambda^\perp \times T^*\langle\Lambda\rangle)$:

$$Op_h(a) = Op_h^\Lambda \circ Op_h^{\Lambda^\perp}(a) = Op_h^{\Lambda^\perp} \circ Op_h^\Lambda(a).$$

Pour que la formule ci-dessus fasse sens, il nous faut donner un sens à la quantification d'une fonction à valeurs opérateurs, alors que nous n'avons considéré que des fonctions à valeurs réelles ou complexes. En fait, la formule 2.1 fait encore sens pour des fonctions à valeurs dans les opérateurs bornés, ce que nous utiliserons par la suite.

Soit $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$ ayant tous ses modes de Fourier en x selon la direction Λ. D'après l'équation 4.9, $a \circ \tilde{\pi}_\Lambda$ est constante en la variable $s \in \mathbb{T}_{\Lambda^\perp}$. On écrira donc parfois $a \circ \tilde{\pi}_\Lambda(\sigma, y, \eta)$ à la place de $a \circ \tilde{\pi}_\Lambda(s, \sigma, y, \eta)$. L'équation 4.10 se réécrit :

$$T_\Lambda Op_h(a) = Op_h^\Lambda Op_h^{\Lambda^\perp}(a \circ \tilde{\pi}_\Lambda) T_\Lambda = Op_h^\Lambda(a \circ \tilde{\pi}_\Lambda(hD_s, \cdot)) T_\Lambda. \tag{4.11}$$

Cette équation fait bien sens, car pour tout $\sigma \in \Lambda^\perp$, les opérateurs $Op_h^\Lambda(a \circ \tilde{\pi}_\Lambda(\sigma, \cdot))$ envoie l'espace $T_\Lambda(L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d))$ dans lui même.

Réécriture de $w^h_{u,\Lambda,R}$ Soit $a \in \mathcal{S}^1_\Lambda$. Définissons $a^h_{R,\Lambda} \in C_c^\infty(\Lambda^\perp \times T^*\mathbb{T}_\Lambda)$ par

$$a^h_{R,\Lambda}(\sigma, y, \eta) := a_2(\tilde{\pi}_\Lambda(\sigma, y, h\eta), \eta) = a_2(y, \sigma + h\eta, \eta).$$

Cette fonction est nulle si $|\eta| > R$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle w^h_{u,\Lambda,R}(t), a\rangle &= \int_{T^*\mathbb{T}^d} a_2(x, \xi, \frac{P_\Lambda(\xi)}{h}) w^h_u(t)(dx, d\xi) \\
&= \langle Op_h(a_2(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h})) u_h(t), u_h(t)\rangle \\
&= \langle T_\Lambda Op_h(a_2(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h})) u_h(t), T_\Lambda u_h(t)\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}; L^2(\mathbb{T}_\Lambda))} \\
&= \langle Op_h^\Lambda(a^h_{R,\Lambda}(hD_s, y, \frac{\eta}{h})) T_\Lambda u_h(t), T_\Lambda u_h(t)\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}; L^2(\mathbb{T}_\Lambda))} \\
&= \langle Op_1^\Lambda(a^h_{R,\Lambda}(hD_s, \cdot)) T_\Lambda u_h(t), T_\Lambda u_h(t)\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}; L^2(\mathbb{T}_\Lambda))}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Le passage à la dernière ligne provient de l'équation 2.2.

Remarquons que, pour tout $R > 0$ et pour tout $(s,\sigma) \in T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}$, $a^h_{R,\Lambda}(s,\sigma,\cdot)$ est à support compact en (y,η), car cette fonction est nulle quand $|\eta| > R$. Le théorème 2.1.5 nous dit alors que l'opérateur

$$Op_1^\Lambda(a^h_{R,\Lambda}(\sigma,\cdot))$$

est compact sur $L^2(\mathbb{T}_\Lambda)$.

Cette remarque justifie que l'on s'intéresse aux objet suivants :
Soit $K \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};\mathcal{K}(L^2(\mathbb{T}_\Lambda)))$, où $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{T}_\Lambda))$ est l'ensemble des opérateurs compacts sur $L^2(\mathbb{T}_\Lambda)$. On écrit alors :

$$\big(n^h_{u,\Lambda}(t),K\big) := \langle T_\Lambda u_h(t), K(s,hD_s)T_\Lambda u_h(t)\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))}. \tag{4.13}$$

Ici, $K(s,hD_s)$ désigne la quantification de Weyl de K. La formule 2.1, que nous avons donné pour une fonction a à valeurs complexes, fait encore sens quand a est à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$, où H est un espace de Hilbert.

Nous aimerions étudier la limite quand $h \longrightarrow 0$ d'un tel objet, afin d'obtenir des informations sur $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$. Pour cela, nous allons avoir besoin de faire quelques rappels d'analyse fonctionnelle.

Mesures à valeurs opérateurs Etant donné un espace de Hilbert H, on écrira $\mathcal{K}(H)$ pour l'ensemble des opérateurs compacts sur H, et $\mathcal{L}^1(H)$ pour l'ensemble des opérateurs de type trace sur H.

Si $a \in \mathcal{L}^1(H)$, on notera sa trace trA. On munit $\mathcal{L}^1(H)$ de la norme $\|A\|_{\mathcal{L}^1(H)} = tr|A|$. $\mathcal{L}^1(H)$ est alors le dual de l'espace $\mathcal{K}(H)$, la dualité étant donnée par $\big(A,B\big) := tr(AB)$.

Définition 4.3.2. *Etant donné un espace métrique T séparé, σ-compact et localement compact, on écrira $\mathcal{M}(T;\mathcal{L}^1(H))$ pour l'ensemble des opérateurs linéaires $\mu : C_c(T) \longrightarrow \mathcal{L}^1(H)$ bornés, au sens où pour tout $K \subset T$ compact, il existe $C_K > 0$ telle que pour tout $\phi \in C_c(K)$, on ait :*

$$\|\mu(\phi)\|_{\mathcal{L}^1(H)} \leq C_K \sup_{x\in K} |\phi(x)|.$$

$\mathcal{M}(T;\mathcal{L}^1(H))$ s'identifie naturellement au dual de $C_c(T;\mathcal{K}(H))$. On dira que $\mu \in \mathcal{M}(T;\mathcal{L}^1(H))$ est positive si, pour toute ϕ positive, pour tout $v \in H$, $\langle \mu(\phi)v|v\rangle \geq 0$. On notera $\mathcal{M}_+(T;\mathcal{L}^1(H))$ l'ensemble des mesures positives sur T à valeurs $\mathcal{L}^1(H)$.

Théorème 4.3.3. *Soit (u_h) bornée dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. Alors, quitte à extraire, on peut supposer que $n^h_{u,\Lambda}(t)$ converge vers $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}$ au sens de la topologie faible-* de $L^\infty(\mathbb{R}_t;\mathcal{D}'(T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};\mathcal{L}^1(L^2(\mathbb{T}_\Lambda))))$. C'est à dire que l'on a, pour tout $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $K \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};\mathcal{K}(L^2(\mathbb{T}_\Lambda)))$:*

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\big(n^h_{u,\Lambda}(t),K\big)dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) Tr \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} K(s,\sigma)\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma)dt.$$

De plus, $\tilde{\rho}_{u,\Lambda} \in L^\infty(\mathbb{R}_t;\mathcal{M}_+(T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};\mathcal{L}^1(L^2(\mathbb{T}_\Lambda))))$, et pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$Tr \int_{T^*\mathbb{T}^\perp_\Lambda} \tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma) \leq 1.$$

Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la mesure $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ est invariante par le flot géodésique sur $T^*\mathbb{T}_\Lambda$.

La preuve de ce théorème est la même que celle des théorèmes 3.1.2 et 3.1.3.

On veut maintenant utiliser la dernière ligne de 4.12 et le théorème 4.3.3, et prendre les limites $h \longrightarrow 0$ et $R \longrightarrow \infty$.

Tout d'abord, remarquons que si $a \in \mathcal{S}^1_\Lambda$, le théorème de Calderón-Vaillancourt nous dit que pour R fixé, on a

$$Op_1^\Lambda(a^h_{R,\Lambda}(\sigma,\cdot)) = Op_1^\Lambda(a^0_{R,\Lambda}(\sigma,\cdot)) + O(h),$$

où le $O(h)$ est au sens de la norme L^2.

D'autre part, en écrivant $a^0_\Lambda(\sigma, y, \eta) = a(y,\sigma,\eta)$, c'est à dire en prenant $a^h_{R,\Lambda}$ pour $h = 0$ et $R = \infty$, on a :

$$\lim_{R\to\infty} Op_1^\Lambda(a^0_{R,\Lambda}(\sigma,\cdot)) = Op_1^\Lambda(a^0_\Lambda(\sigma,\cdot)),$$

où la limite est à comprendre au sens de la topologie forte de $C_c^\infty(T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}; \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}_\Lambda)))$. En effet, $a^0_{R,\Lambda}$ converge vers a^0_Λ pour toutes les semi-normes définissant la topologie de $C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$. Le théorème de Calderón-Vaillancourt nous donne alors bien la convergence désirée.

En combinant la formule 4.12, le théorème 4.3.3 et les remarques précédentes, on obtient le corollaire suivant, qui fait le lien entre $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}$ et $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$:

Corollaire 4.3.2. *Soit $\tilde{\rho}_{u,\Lambda} \in L^\infty(\mathbb{R}_t; \mathcal{M}_+(T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}; \mathcal{L}^1(L^2(\mathbb{T}_\Lambda))))$ une limite faible-* de la suite $(n^h_{u,\Lambda})$. On a, pour tout $a \in \mathcal{S}^1_\Lambda$ et presque tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\int_{T^*\mathbb{T}^d\times\langle\Lambda\rangle} a(x,\xi,\eta)\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,dx,d\xi,d\eta) = Tr_{L^2(\mathbb{T}_\Lambda)}\Big(\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} Op_1^\Lambda(a^0_\Lambda(\sigma,\cdot))\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma)\Big). \tag{4.14}$$

On retrouve bien ici, par définition de $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}$, le fait que $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$ a son support sur $\mathbb{T}^d \times \Lambda^\perp \times \langle\Lambda\rangle$. Il était possible d'obtenir cette information sans construire les objets compliqués que nous avons introduits ici.

Preuve de l'absolue continuité et du fait que $\mu_{u,\Lambda}$ est une mesure. Si $a \in \mathcal{S}^1_\Lambda$ ne dépend pas de la variable $\eta \in \langle\Lambda\rangle$, la formule 4.14 se réécrit :

$$\int_{T^*\mathbb{T}^d\times\langle\Lambda\rangle} a(x,\xi)\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,dx,d\xi,d\eta) = Tr_{L^2(\mathbb{T}_\Lambda)}\left(\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} m_{a\circ\pi_\Lambda}(\sigma)\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma)\right),$$

où, pour tout $\sigma \in \Lambda^\perp$, on écrit $m_a(\sigma)$ pour l'opérateur de multiplication par $a(\cdot,\sigma)$ dans $L^2(\mathbb{T}_\Lambda)$. On en déduit bien que $\mu_{u,\Lambda}$ est une mesure de Radon positive sur $T^*\mathbb{T}^d$.

Or on sait que les opérateurs $Op_h^\Lambda(a\circ\tilde{\pi}_\Lambda(\sigma,\cdot))$ envoient $T_\Lambda(L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d))$ dans lui-même. Par l'équation 4.13, on peut donc obtenir la même formule, avec l'espace $L^2(\mathbb{T}_\Lambda)$ remplacé par le sous-espace $T_\Lambda(L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d))$. Comme, sur cet espace, on a $m_{a\circ\pi_\Lambda}(\sigma) = T_\Lambda m_a(\sigma) T_\Lambda^*$, on obtient la formule :

$$\int_{T^*\mathbb{T}^d\times\langle\Lambda\rangle} a(x,\xi)\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,dx,d\xi,d\eta) = Tr_{L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d)}\left(\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} m_a(\sigma)T_\Lambda^*\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma)T_\Lambda\right).$$

En particulier, si $a = a(x)$ ne dépend pas de la variable ξ, ceci se réécrit :

$$\int_{T^*\mathbb{T}^d\times\langle\Lambda\rangle} a(x)\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,dx,d\xi,d\eta) = Tr_{L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d)}\left(m_a \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} T^*_\Lambda \tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma)T_\Lambda\right). \tag{4.15}$$

Cette formule suffit à justifier l'absolue continuité de la projection de $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$ sur $\mathbb{T}^d$. En effet, notons $O(t) = \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} T^*_\Lambda \tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma)T_\Lambda$. C'est un opérateur de type trace, donc on peut le décomposer selon une base orthonormale ϕ_i comme $O(t) = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$. On a alors :

$$Tr_{L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d)}\left(m_a \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} T^*_\Lambda \tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma)T_\Lambda\right) = \int_{\mathbb{T}_\Lambda} dy a(y) \sum_i \lambda_i |\phi_i(y)|^2.$$

On a $\sum_i \lambda_i |\phi_i(y)|^2 \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Il n'est alors pas difficile de voir que si le support de a a une mesure de Lebesgue qui tend vers 0, alors que a est bornée, le terme de droite dans 4.15 tend vers 0. Par conséquent, le terme de gauche tend également vers 0.

La preuve de l'absolue continuité de la projection de $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$ sur $\mathbb{T}^d$ n'est pas tout à fait terminée. En effet, dans la formule 4.15, nous n'avons le droit qu'aux fonctions $a(y)$ dont tous les modes de Fourier sont selon la direction Λ. On pourrait donc a priori avoir un phénomène de concentration sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, invariant par les rotations de direction Λ.

Cependant, un tel phénomène est impossible, car $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ est invariante par ϕ^0_τ. On en déduit le théorème. □

4.4 Loi de propagation pour $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}$

Rappelons que $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}$ a été définie dans le théorème 4.3.3. Nous allons obtenir une loi de propagation pour cet opérateur, c'est à dire une équation permettant de déduire le comportement de $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ en fonction de t. Ceci nous permettra, par le corollaire 4.3.2, d'obtenir une loi de propagation pour $\mu_{u,\Lambda}$.

Commençons par introduire quelques notations. Nous écrirons, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{V}_k(t,\cdot)$ les coefficients de Fourier de $V(t,\cdot)$. Nous noterons $\langle V\rangle_\Lambda(t,\cdot)$ la moyenne de $V(t,\cdot)$ selon la direction $\Lambda^\perp$. Autrement dit :

$$\langle V\rangle_\Lambda(t,\cdot) := \sum_{k\in\Lambda} \tilde{V}_k(t)\frac{e^{ik\cdot x}}{(2\pi)^{d/2}}.$$

On écrira $H^\Lambda_{\langle V\rangle_\Lambda}(t,\cdot) := -\frac{1}{2}\Delta_\Lambda + \langle V\rangle_\Lambda(t,\cdot)$, où Δ_Λ est le laplacien sur $\langle\Lambda\rangle$.

Proposition 4.4.1. *Soit $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}$ définie comme dans le théorème 4.3.3. Soit $(s,\sigma) \mapsto K(\sigma)$ une fonction dans $C^\infty_c(T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}; \mathcal{K}(L^2(\mathbb{T}_\Lambda)))$ ne dépendant pas de s. Alors on a :*

$$\frac{d}{dt}Tr\int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda} K(\sigma)\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma) = iTr\int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda} [H^\Lambda_{\langle V\rangle_\Lambda}, K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma).$$

Comme promis, nous en déduisons une loi de propagation pour $\mu_{u,\Lambda}$. Celle-ci est une conséquence immédiate de la proposition précédente et du corollaire 4.3.2.

On écrira U^Λ_V pour le propagateur associé à $H^\Lambda_{\langle V\rangle_\Lambda}$.

Corollaire 4.4.1. *Pour tout $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$ dont tous les coefficients de Fourier en la variable x sont selon la direction Λ, on a :*

$$\int_{T^*\mathbb{T}^d} a(x,\xi)\mu_{u,\Lambda}(t,dx,d\xi) = Tr\left(\int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda} U_V^\Lambda m_{a\circ\pi_\Lambda}(\sigma)U_V^\Lambda \tilde{\rho}_{u,\Lambda}(0,ds,d\sigma)\right).$$

La proposition 4.4.1 est une conséquence d'une loi de propagation un peu plus générale, que nous présentons tout de suite.

Si $s \in \mathbb{T}_{\Lambda^\perp}$ est fixé, on écrira $H_V^\Lambda(t,s) := -\frac{1}{2}\Delta_\Lambda + V(t,\pi_\Lambda(s,y)) = -\frac{1}{2}\Delta_\Lambda + V(t,s+y)$.

Lemme 4.4.1. *Soit K comme dans la proposition 4.4.1. On a, au sens des distributions :*

$$\frac{d}{dt}Tr\int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda} K(\sigma)\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma) = iTr\int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda}[H_V^\Lambda(t,s),K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma).$$

Preuve que le lemme 4.4.1 implique la proposition 4.4.1. Supposons que le lemme 4.4.1 soit vérifié. On sait que $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ est invariant par le flot géodésique. Il s'ensuit, par la remarque 4.2.1, que $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,\cdot)|_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda}$ est invariant par toutes les translations $s \mapsto s+v$ pour $v \in \Lambda^\perp$. Par conséquent, cette mesure se tensorialise en

$$\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,\cdot)|_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda} = ds \otimes \int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} \tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,\cdot)|_{R_\Lambda}.$$

Mais, en calculant l'intégrale en s, on obtient :

$$\int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} H_V^\Lambda(t,s)ds = -\frac{1}{2}\Delta_\Lambda + \int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} V(t,\pi_\Lambda(s,y))ds = H_{\langle V\rangle_\Lambda}^\Lambda(t).$$

On en déduit bien que

$$\int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda}[H_V^\Lambda(t,s),K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma) = \int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda}[H_{\langle V\rangle_\Lambda}^\Lambda,K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma).$$

et on en déduit la proposition 4.4.1. □

Nous prouverons le lemme 4.4.1 dans le cas d'un potentiel lisse. Pour le cas des potentiels moins réguliers, nous renvoyons le lecteur à la section suivante.
On a une loi de propagation simple pour $\left(n_{u,\Lambda}^h(t),K\right)$, comme nous le dit le lemme suivant.

Lemme 4.4.2. *Soit $(s,\sigma)\mapsto K(\sigma)$ une fonction dans $C_c^\infty(T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};\mathcal{K}(L^2(\mathbb{T}_\Lambda)))$ ne dépendant pas de s. On a :*

$$\frac{d}{dt}\left(n_{u,\Lambda}^h(t),K\right) = i\langle T_\Lambda u_h(t),[H_V^\Lambda(t,\cdot),K(hD_s)]T_\Lambda u_h(t)\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))}. \qquad (4.16)$$

Démonstration. L'égalité 4.11 nous donne :

$$T_\Lambda \Delta T_\Lambda^* = \Delta_\Lambda + \Delta_{\Lambda^\perp}.$$

De plus, on a

$$[\Delta_{\Lambda^\perp}, K(hD_s)] = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(n^h_{u,\Lambda}(t), K\big) &= \frac{d}{dt}\langle T_\Lambda u_h(t), K(hD_s)T_\Lambda u_h(t)\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))}\\ &= i\langle T_\Lambda u_h, \Big[-\frac{1}{2}\Delta + V, K(hD_s)\Big]T_\Lambda u_h\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))}\\ &= i\langle T_\Lambda u_h, [H^\Lambda_V(t,\cdot), K(hD_s)]T_\Lambda u_h\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))}.\end{aligned}$$

□

Preuve du lemme 4.4.1. On passe à la limite dans l'égalité 4.16. On a, par le théorème 4.3.3, la limite suivante au sens des distributions :

$$\lim_{h\to 0}\ \frac{d}{dt}\big(n^h_{u,\Lambda}(t), K\big) = \frac{d}{dt}Tr\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} K(\sigma)\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma)$$

D'autre part, on a

$$i\langle T_\Lambda u_h(t), [H^\Lambda_V(t,\cdot), K(hD_s)]T_\Lambda u_h(t)\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))} = \big(n^h_{u,\Lambda}(t), [H^\Lambda_V(t,\cdot), K(\sigma)]\big) + O(h).$$

L'hypothèse V lisse nous assure que ceci correspond bien à la définition donnée par 4.13. Par conséquent, le théorème 4.3.3 nous donne, au sens des distributions :

$$\lim_{h\to 0} i\langle T_\Lambda u_h, [H^\Lambda_V(t,\cdot), K(hD_s)]T_\Lambda u_h\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))} = iTr\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} [H^\Lambda_V(t,\cdot), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma).$$

On a donc, au sens des distributions :

$$\frac{d}{dt}Tr\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} K(\sigma)\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma) = iTr\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} [H^\Lambda_V(t,\cdot), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma).$$

Ceci conclut la preuve du lemme 4.4.1. □

4.5 Deuxièmes micro-localisations successives

Rappelons ici ce que nous avons prouvé dans la section précédente. Les mesures semi-classiques $\mu_u(t,\cdot)$ peuvent se décomposer de la manière suivante :

$$\mu_u(t,\cdot) = \sum_{\Lambda\in\mathcal{L}} (\mu_{u,\Lambda}(t,\cdot) + \mu^\Lambda_u(t,\cdot)),$$

où

$$\mu_{u,\Lambda}(t,\cdot) = \int_{\langle\Lambda\rangle} \tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,\cdot,d\eta)|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}$$

et

$$\mu^\Lambda_u(t,\cdot) = \int_{\langle\Lambda\rangle} \tilde{\mu}^\Lambda_u(t,\cdot,d\eta)|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}.$$

Les objets $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$ et $\tilde{\mu}_u^\Lambda$ ont les propriétés suivantes :
- $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,dx,d\xi,d\eta) \in L^\infty(\mathbb{R};(\mathcal{S}_\Lambda^1)')$.
- $\tilde{\mu}_u^\Lambda(t,dx,d\xi,d\eta) \in L^\infty(\mathbb{R};(\mathcal{M}_+(T^*\mathbb{T}^d \times \mathbb{S}_{\langle\Lambda\rangle}))$.
- $\int_{\langle\Lambda\rangle} \tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,\cdot,d\eta) \in L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{M}_+(T^*\mathbb{T}^d))$.
- Pour tout $a \in \mathcal{S}_\Lambda^1$, on a

$$\int_{T^*\mathbb{T}^d \times \langle\Lambda\rangle} a(x,\xi,\eta)\tilde{\mu}_{u,\Lambda}(t,dx,d\xi,d\eta) = Tr_{L^2(\mathbb{T}_\Lambda)}\Big(\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} Op_1^\Lambda(a_\Lambda^0(\sigma,\cdot))\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma)\Big),$$

où $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t) \in \mathcal{M}_+(T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};\mathcal{L}^1(T_\Lambda(L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d))))$ est une mesure invariante par le flot géodésique sur $T^*\mathbb{T}_\Lambda$.

- Pour tout $a \in \mathcal{S}_\Lambda^1$, on a, quitte à extraire,

$$\big(\tilde{\mu}_u^\Lambda(t,dx,d\xi,d\eta),a(x,\xi,\eta)\big) = \lim_{R\to\infty}\lim_{h\to 0}\int_{T^*\mathbb{T}^d}\Big(1-\chi\Big(\frac{P_\Lambda(\xi)}{Rh}\Big)\Big)a\Big(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h}\Big)w_u^h(t)(dx,d\xi).$$

- $\tilde{\mu}_u^\Lambda$ est invariante par les flots ϕ_τ^0 et ϕ_τ^1.

Deuxième micro-localisation suivante Ce que nous pouvons retenir de ce qui précède, c'est que $\mu_{u,\Lambda}$ a de bonne propriétés, car on connait une loi de propagation, et on a l'absolue continuité de sa projection sur la variable spatiale. En revanche, μ_u^Λ ne possède pas de telles propriétés, sauf si $\Lambda = 0$, auquel cas $\mu_u^\Lambda = 0$.

On va donc appliquer le formalisme de décomposition selon les directions résonnantes et de deuxième micro-localisation à la mesure μ_u^Λ, dans l'espoir de l'écrire comme une somme d'objets possédant de bonnes propriétés, et d'objets de dimension inférieure.

Pour presque tout $t > 0$ et pour tout $\eta \in \langle\Lambda\rangle$, on sait que $\tilde{\mu}_u^\Lambda(t,\cdot,\cdot,\eta)$ est une mesure positive sur $T^*\mathbb{T}^d$, dont le support en ξ est sur R_Λ. On peut donc définir $\mathcal{L}(\Lambda)$ comme étant l'ensemble des sous-modules primitifs de $\mathbb{Z}^d$ étant inclus dans Λ. On pose aussi $R_{\Lambda'}(\Lambda) := \Lambda'^\perp \cap \langle\Lambda\rangle \cap \Omega_{rg\Lambda - rg\Lambda'}$. On a alors

$$\tilde{\mu}_u(t,\cdot,\cdot,\eta) = \sum_{\Lambda'\in\mathcal{L}(\Lambda')} \tilde{\mu}_u^{\Lambda,\Lambda'}|_{\mathbb{T}^d\times R_{\Lambda'}(\Lambda)}.$$

On sait alors que $\tilde{\mu}_u^{\Lambda,\Lambda'}|_{\mathbb{T}^d\times R'_\Lambda(\Lambda)}$ a tous ses modes de Fourier en la variable x selon la direction Λ'.

Pour raisonner comme dans la partie 4.3, on définit l'espace $\mathcal{S}^2_{\Lambda,\Lambda'}$ des fonctions $a(x,\xi,\eta,\eta')$ lisses sur $T^*\mathbb{T}^d \times \langle\Lambda\rangle \times \langle\Lambda'\rangle$ qui sont à support compact sur $T^*\mathbb{T}^d$, homogènes de degré 0 en η et η', et dont tous les coefficients de Fourier en la variable x sont selon la direction Λ'.

On pose alors

$$\big(w_{u,R,R'}^{h,\Lambda,\Lambda'}(t),a\big) := \int_{T^*\mathbb{T}^d}\Big(1-\chi\Big(\frac{P_\Lambda(\xi)}{Rh}\Big)\Big)\Big(1-\chi\Big(\frac{P_{\Lambda'}(\xi)}{R'h}\Big)\Big)a\Big(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h},\frac{P_{\Lambda'}(\xi)}{h}\Big)\Big),$$

$$\big(w_{u,R,R',\Lambda'}^{h,\Lambda}(t),a\big) := \int_{T^*\mathbb{T}^d}\Big(1-\chi\Big(\frac{P_\Lambda(\xi)}{Rh}\Big)\Big)\chi\Big(\frac{P_{\Lambda'}(\xi)}{R'h}\Big)a\Big(x,\xi,\frac{P_\Lambda(\xi)}{h},\frac{P_{\Lambda'}(\xi)}{h}\Big)\Big).$$

Par le théorème de Calderón-Vaillancourt, ces fonctions sont bornées dans $L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{S}^2_{\Lambda,\Lambda'})$, et on peut donc extraire des sous-suites convergentes :

$$\lim_{R'\to\infty}\lim_{R\to\infty}\lim_{h\to 0}\left(w^{h,\Lambda,\Lambda'}_{u,R,R'}(t),a\right)=:\left(\tilde{\mu}^{\Lambda,\Lambda'}_{u},a\right),$$

$$\lim_{R'\to\infty}\lim_{R\to\infty}\lim_{h\to 0}\left\langle w^{h,\Lambda}_{u,R,R',\Lambda'}(t),a\right\rangle=:\left\langle\tilde{\mu}^{\Lambda}_{u,\Lambda'},a\right\rangle.$$

On pose ensuite $\mu^{\Lambda,\Lambda'}_u(t,\cdot)=\int_{R_{\Lambda'}(\Lambda)\times\Lambda'}\tilde{\mu}^{\Lambda,\Lambda'}_u(t,\cdot,d\eta,d\eta')|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}$, et $\mu^{\Lambda}_{u,\Lambda'}(t,\cdot)=\int_{R_{\Lambda'}(\Lambda)\times\Lambda'}\tilde{\mu}^{\Lambda}_{u,\Lambda'}(t,\cdot,d\eta,d\eta')|_{\mathbb{T}^d\times R_\Lambda}$. On peut alors raisonner de la même manière que dans la partie 4.3.

Ceci peut être vu comme la deuxième étape d'un raisonnement par récurrence. En décomposant de nouveau chacun des termes $\mu^{\Lambda,\Lambda'}_u$ et en laissant les termes $\mu^{\Lambda}_{u,\Lambda'}$ invariants, on peut passer à l'étape suivante.

Résultat des micro-localisations successives Après avoir effectué ce raisonnement d fois, on peut écrire, pour presque tout t

$$\mu_u(t,\cdot)=\sum_{1\leq l\leq d-1}\sum_{\Lambda_1\supset\ldots\supset\Lambda_l}\mu^{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{l-1}}_{u,\Lambda_l}(t,\cdot),$$

la somme s'effectuant sur toutes les suites strictement décroissantes de sous-modules primitifs de $\mathbb{Z}^d$. Chacun des termes est une mesure positive sur $T^*\mathbb{T}^d$ dont la projection sur $\mathbb{T}^d$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Le théorème 4.1.1 en découle.

Le même raisonnement que dans la section précédente permet d'obtenir les $\mu^{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{l-1}}_{u,\Lambda_l}(t,\cdot)$ en fonction de $\tilde{\rho}^{\Lambda_1\ldots\Lambda_{l-1}}_{u,\Lambda_l}(t)$, mesure positive sur $T^*\mathbb{T}_{\Lambda_l^\perp}\times\mathbb{S}_{\langle\Lambda_1\rangle}\times\ldots\times\mathbb{S}_{\langle\Lambda_l\rangle}$ à valeurs dans $\mathcal{L}^1(T_{\Lambda_l}L^2_{\Lambda_l}(\mathbb{T}^d))$.

Nous allons enfin énoncer le second théorème le plus important de ce chapitre, qui combine toutes les informations que nous avons obtenues sur les lois de propagation.

Si $\Lambda\in\mathcal{L}$, on pose

$$\nu_{u,\Lambda}(t\cdot)=\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{\Lambda_1\supset\ldots\supset\Lambda_k\supset\Lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\mu^{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_k}_{u,\Lambda}(t,\cdot,d\xi),$$

où la seconde somme se fait sur toutes les suites strictement décroissantes de sous-modules primitifs de Λ.

On pose aussi

$$\sigma_{u,\Lambda}=\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{\Lambda_1\supset\ldots\supset\Lambda_k\supset\Lambda}\int_{\mathbb{T}^d\times R_{\Lambda_1}\times R_{\Lambda_2}(\Lambda_1)\times\ldots\times R_\Lambda(\Lambda_k)\times\langle\Lambda\rangle}\tilde{\rho}^{\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_k}_{u,\Lambda}(0,ds,d\sigma,d\eta_1,\ldots,d\eta_k,d\eta).$$

On a alors, pour presque tout t,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\mu_u(t,\cdot,d\xi)=\sum_\Lambda\nu_{u,\Lambda}(t,\cdot),$$

et $\nu_{u,\Lambda}$ est déterminée par $\sigma_{u,\Lambda}$ de la manière suivante. Pour tout $b\in L^\infty(\mathbb{T}^d)$, on a :

$$\int_{\mathbb{T}^d}b(x)\nu_{u,\Lambda}(t,dx)=Tr(m_{\langle b\rangle_\Lambda}U_{\langle V\rangle}(t)\sigma_{u,\Lambda}U_{\langle V\rangle}(t)^*).$$

Autrement dit, on a le théorème suivant :

Théorème 4.5.1. *Soit (u_h) une suite bornée dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. On peut alors extraire une sous-suite telle que :*

- la suite $w_u^h(t,\cdot)$ converge vers $\mu_u(t,\cdot)$ pour la topologie faible-.*

- pour chaque sous-module primitif $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, on peut construire à partir de (u_h) un opérateur $\sigma_{u,\Lambda}$ positif de type trace agissant sur $L^2_\Lambda(\mathbb{T}^d)$.

- pour presque tout t, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu_u(t,\cdot,d\xi) = \sum_\Lambda \nu_{u,\Lambda}(t,\cdot),$$

où la mesure $\nu_{u,\Lambda}(t,\cdot)$ est une mesure sur $\mathbb{T}^d$ dont les coefficients de Fourier non nuls sont tous selon la direction Λ, et qui est définie par $\forall b \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$:

$$\int_{\mathbb{T}^d} b(x)\nu_{u,\Lambda}(t,dx) = Tr(m_{\langle b\rangle_\Lambda} U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)\sigma_{u,\Lambda}U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)^*).$$

Ce théorème permet de mieux comprendre la proposition 3.2.2. Pour que deux suites de conditions initiales donnent la même mesure semi-classique dépendante du temps $\mu_u(t,\cdot)$, il ne suffit pas qu'elles donnent la même mesure semi-classique au temps $t=0$. En revanche, il suffit qu'elles donnent les mêmes $\sigma_{u,\Lambda}$.

Projection sur la variable ξ Nous nous sommes beaucoup intéressés à la projection de la mesure semi-classique sur les variables de position. Etudions maintenant sa projection sur les variables de moment. Si μ est une limite faible-* de la suite des $w_u^h(t)$, on notera $\bar{\mu}_u$ sa mesure image selon la projection $(x,\xi)\mapsto\xi$.

Proposition 4.5.1. *$\bar{\mu}_u$ est uniforme pour presque tout t. Si $\mu_{u,0}$ est la mesure classique associée à (u_h), on a pour presque tout t :*

$$\bar{\mu}_u(t,\cdot) = \int_{\mathbb{T}^d} \mu_{u,0}(dy,\cdot).$$

Démonstration. Si $a\in C_c(\mathbb{R}^d)$ et $T\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\langle U_V(T)u_h, a(hD_x)U_V(T)u_h\rangle - \langle u_h, a(hD_x)u_h\rangle &= -i\int_0^T \langle U_V(t)u_h, \Big[a(hD_x), -\frac{\Delta}{2}+V\Big]U_V(t)u_h\rangle dt \\ &= -i\int_0^T \langle U_V(t)u_h, \Big[a(hD_x), V\Big]U_V(t)u_h\rangle dt\end{aligned}$$

Or on sait par 2.6 que

$$\|[a(hD_x),V]\|_{L^2\to L^2} = O(h).$$

Par conséquent, la différence ci-dessus tend vers 0 avec h, et on en déduit bien

$$\lim_{h\to 0}\langle U_V(T)u_h, a(hD_x)U_V(T)u_h\rangle = \int_{T^*\mathbb{T}^d} a(\xi)\mu_{u,0}(dx,d\xi),$$

d'où la proposition découle. □

Corollaire 4.5.1. *Soit Λ un sous-module primitif de $\mathbb{Z}^d$. Si $\mu_{u,0}(\mathbb{T}^d\times\Lambda^\perp)=0$, alors $\sigma_{u,\Lambda}=0$.*

4.6 Le cas d'un potentiel moins régulier

4.6.1 Propriétés de régularité pour un potentiel peu régulier

Dans ce paragraphe, nous présenterons une méthode, due à N.Burq (cf [Bur12]), qui permet de passer de propriétés sur l'équation de Schrödinger sans potentiel à des propriétés sur l'équation avec un potentiel. Initialement, cette méthode était utilisée pour la propriété (AC_T), mais nous l'expliquerons dans un cadre général, pour qu'elle puisse s'appliquer à la propriété (UI_T). Les propriétés auxquelles cette méthode est applicable sont celles données par la définition suivante.

Définition 4.6.1. *Soit (P_T) une propriété s'appliquant à une suite bornée de fonctions $u_n \in L^2([0;T],\mathbb{T}^d)$. On dira qu'elle est admissible si elle est stable par somme, par multiplication par une fonction indicatrice en temps, et par limite, au sens où :*
(i) si (u_n) et (v_n) vérifient (P_T), alors (u_n+v_n) vérifient (P_T),
(ii) si (u_n) vérifie (P_T) et si A est une partie mesurable de $[0;T]$, alors $\mathbf{1}_{t\in A}u_n$ vérifie (P_T).
(iii) s'il existe, pour tout $k\in\mathbb{N}$, une suite $(v_n^{(k)})$ telle que $(v_n^{(k)})$ vérifie (P_T) et que

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|v_n-v_n^{(k)}\|_{L^2(]0,T[\times\mathbb{T}^d)}=0,$$

alors (v_n) vérifie (P_T).

Remarque 4.6.1. *Nous verrons dans le paragraphe suivant que les propriétés (AC_T) et (UI_T) sont admissibles.*

Théorème 4.6.1. *Soit d'une part (P_T) une propriété admissible telle que, pour toute suite (v_n) bornée dans $L^2(\mathbb{T}^d)$, et pour tout $T>0$, la suite des $e^{it\Delta}u_n$ vérifie (P_T).*

Soient d'autre part (u_n) bornée dans $L^2(\mathbb{T}^d)$, et (f_n) bornée pour chacune des semi-normes de $L^1_{loc}(\mathbb{R}_t;L^2(\mathbb{T}^d))$, et soit

$$\psi_n := e^{it\Delta}u_n+\frac{1}{i}\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}f_n(s)ds.$$

C'est à dire que ψ_n est l'unique solution de

$$\begin{cases}(i\partial_t+\Delta)\psi_n=f_n\\ \psi_n|_{t=0}=u_n\end{cases}$$

Alors, $\forall T>0$, (ψ_n) est bornée dans $L^2(]0;T[\times\mathbb{T}^d)$, et vérifie (P_T).

Corollaire 4.6.1. *Soit (P_T) comme dans le théorème précédent. Soit $V\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t;\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^d)))$, et soit (u_n) une suite bornée dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. Alors, pour tout $T>0$, la suite $(\psi_n)=(e^{it(\Delta-V)}u_n)$ vérifie (P_T).*

Démonstration que le théorème implique le corollaire : On a

$$\begin{cases}(i\partial_t+\Delta-V)\psi_n=0\\ \psi_n|_{t=0}=u_n\end{cases}$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\|\psi_n\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}=2\Re(\partial_t\psi_n,\psi_n)_{L^2(\mathbb{T}^d)}=2\Im((\Delta-V)\psi_n,\psi_n)_{L^2(\mathbb{T}^d)}=2\Im(V\psi_n,\psi_n)_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

On en déduit, par le lemme de Gronwall, que

$$\|\psi_n\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq \|u_n\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} e^{\int_0^t \|V(s)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^d)}ds}.$$

On en déduit que la suite $(f_n) = (V_n u_n)$ est bornée dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{T}^d))$. On peut donc appliquer le théorème précédent. $\square$

Preuve du théorème. Soit $T > 0$. On a $\psi_n := e^{it\Delta}u_n + \frac{1}{i}\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f_n(s)ds$. Il nous faut montrer que

$$w_n := \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f_n(s)ds = \int_0^T e^{i(t-s)\Delta} f_n(s)\mathbf{1}_{\{s\leq t\}}ds$$

vérifie (P_T).

S'il n'y avait pas la fonction $\mathbf{1}_{\{s\leq t\}}$, cela serait trivial : on obtiendrait $e^{it\Delta}g_n$, où $g_n = \int_0^T e^{-is\Delta} f_n(s)ds$, et il suffirait d'utiliser le fait que (P_T) est vraie pour l'équation homogène.

L'idée de la preuve est d'approcher l'ensemble$\mathbf{1}_{\{s\leq t\}}$ par une union finie de rectangles, et d'utiliser l'hypothèse de passage à la limite.

Notons $c_n = \|f_n\|_{L^1(]0,T[;L^2(\mathbb{T}^d))} \leq C$. Nous allons construire une partition dyadique de $]0;T[$ telle que la norme de f_n restreint à chaque intervalle soit égale à $2^{-q}c_n$.
Nous prenons donc une suite $(t_{p,q,n}), q \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 2^q$ telle que :
- $0 = t_{0,q,n} < t_{1,q,n} < ... < t_{2^q,q,n} = T$,
- $\|f_n\|_{L^1(]t_{p,q,n},t_{p+1,q,n}[;L^2(\mathbb{T}^d))} = 2^{-q}c_n$,
- $\forall p = 0, ..., 2^{q-1}$, on a $t_{2p,q,n} = t_{p,q-1,n}$.

Si la fonction $t \mapsto \|f_n\|_{L^1(]0,t[;L^2(\mathbb{T}^d))}$ est strictement croissante pour tout n, alors les $t_{p,q,n}$ sont déterminés de manière unique. Dans le cas général, la dernière condition sert simplement à s'assurer que les choix que nous avons fait sont cohérents entre eux.

Pour $p = 0, ..., 2^{q-1} - 2$, on définit $I_{p,q,n} := [t_{2p,q,n}, t_{2p+1,q,n}[$ et $J_{p,q,n} := [t_{2p+1,q,n}, t_{2p+2,q,n}[$, puis $Q_{p,q,n} := I_{p,q,n} \times J_{p,q,n}$. Remarquons que l'on a :

$$\{(t,s) \in [0,T[^2; s \leq t\} = \bigsqcup_{q=0}^{\infty} \bigsqcup_{p=0}^{2^{q-1}-2} Q_{p,q,n}.$$

C'est à dire qu'on a décomposé le triangle $\{(t,s) \in [0,T[^2; s \leq t\}$ en une union de rectangles. On en déduit

$$\mathbf{1}_{\{(t,s)\in[0,T[^2;s\leq t\}} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2^{q-1}-2} \mathbf{1}_{Q_{p,q,n}}.$$

Si on peut prouver que la somme en q converge, et donc que l'on peut échanger sommes et intégrales, on en déduit que :

$$\begin{aligned} w_n(t) &= \int_0^T \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2^{q-1}-2} e^{i(t-s)\Delta} f_n(s) \mathbf{1}_{t\in J_{p,q,n}} \mathbf{1}_{s\in I_{p,q,n}} de \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2^{q-1}-2} \mathbf{1}_{t\in J_{p,q,n}} e^{it\Delta} \int_0^T e^{-is\Delta} \mathbf{1}_{s\in I_{p,q,n}} f_n(s) de \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2^{q-1}-2} \mathbf{1}_{t\in J_{p,q,n}} e^{it\Delta} g_{p,q,n}, \end{aligned}$$

où on a écrit

$$g_{p,q,n} = \int_0^T e^{-is\Delta} \mathbf{1}_{s\in I_{p,q,n}} f_n(s) ds = \int_{t_{2p,q,n}}^{t_{2p+1,q,n}} e^{-is\Delta} f_n(s) ds.$$

On a

$$\|g_{p,q,n}\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq \|f_n\|_{L^1(]t_{2p,q,n},t_{2p+1,q,n}[;L^2(\mathbb{T}^d))} = 2^{-q} c_n. \tag{4.17}$$

On fait alors une troncature en q, en écrivant

$$w_n^{(k)} = \sum_{q=0}^{k} \sum_{p=0}^{2^{q-1}-2} \mathbf{1}_{t\in J_{p,q,n}} e^{it\Delta} g_{p,q,n}.$$

Remarquons que pour chaque p, q, $(e^{it\Delta} g_{p,q,n})_n$ vérifie (P_T), et donc $\mathbf{1}_{t\in J_{p,q,n}} e^{it\Delta} g_{p,q,n}$ vérifie (P_T). Par conséquent, pour tout k, $(w_n^{(k)})_{(n)}$ vérifie (P_T).
D'autre part, on a d'après 4.17, et par le fait que les $(\mathbf{1}_{t\in J_{p,q,n}})_p$ sont à support disjoints :

$$\begin{aligned} \| \sum_{p=0}^{2^{q-1}-2} \mathbf{1}_{t\in J_{p,q,n}} e^{it\Delta} g_{p,q,n} \|_{L^\infty(]0,T[;L^2(\mathbb{T}^d))} &\leq \sup_{0\leq p\leq 2^{q-1}-2} \|e^{it\Delta} g_{p,q,n}\|_{L^\infty(]0,T[;L^2(\mathbb{T}^d))} \\ &\leq \sup_{0\leq p\leq 2^{q-1}-2} \|g_{p,q,n}\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\ &\leq 2^{-q} c_n \\ &\leq 2^{-q} C \end{aligned}$$

On en déduit d'une part que la somme sur q est bien convergente, et donc que l'on peut échanger somme et intégrale. D'autre part, on a

$$\|w_n - w_n^{(k)}\|_{L^2(]0,T[\times\mathbb{T}^d))} \leq C\sqrt{T} 2^{-k}.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse (iii), ce qui conclut la preuve du théorème. □

Applications

Proposition 4.6.1. *La propriété (AC_T) est admissible.*

Démonstration. Pour prouver le point (i), considérons deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant (AC_T), et montrons que la suite $(v_n + w_n)$ vérifie (AC_T).

En effet, si $|v_n|^2 dtdx$ et $|w_n|^2 dtdx$ convergent pour la topologie faible-* vers μ et ν respectivement, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, toute limite faible-* de la suite $|v_n + w_n|^2 dtdx$ est absolument continue par rapport à $\mu + \nu$.

Le point (ii) est immédiat.

Prouvons le point (iii). Soit ν une valeur d'adhérence de $(|v_n|^2 dtdx)$ pour la topologie faible-*. Soit $\epsilon > 0$, et $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, on a $\limsup_n \|v_n - v_n^{(k)}\|_{L^2(]0,T[\times\mathbb{T}^d)} < \epsilon$. Par un procédé d'extraction diagonale, on peut trouver une suite n_p telle que $|v_{n_p}|^2 dtdx$ et tous les $|v_{n_p}^{(k)}|^2 dtdx$ convergent pour la topologie faible-*, respectivement vers ν, et vers des mesures $\nu^{(k)}$. Par hypothèse, les $\nu^{(k)}$ sont toutes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $f \in C(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$, $f \geq 0$. On a, pour $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned}\int_{]0,T[\times\mathbb{T}^d} f(t,x)|v_{n_p}(t,x)|^2 dtdx &\leq \int_{]0,T[\times\mathbb{T}^d} 2f(t,x)(|v_{n_p}(t,x) - v_{n_p}^{(k)}(t,x)|^2 + |v_{n_p}^{(k)}(t,x)|^2)dtdx \\ &\leq 2\epsilon^2 + 2\int_{]0,T[\times\mathbb{T}^d} f(t,x)|v_{n_p}^{(k)}(t,x)|^2 dtdx\end{aligned}$$

On fait alors tendre p vers l'infini, et on obtient :

$$\langle \nu, f\rangle \leq 2\epsilon^2 + 2\langle \nu^{(k)}, f\rangle$$

Les mesures $\nu, \nu^{(k)}$ sont régulières, donc on en déduit que, pour tout ensemble mesurable E, on a :

$$\nu(E) \leq 2\epsilon^2 + 2\nu^{(k)}(E)).$$

En particulier, si E est de mesure de Lebesgue nulle, on a :

$$\nu(E) \leq 2\epsilon^2.$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ, la preuve de l'hypothèse (iii) s'ensuit. □

Corollaire 4.6.2. *On peut donc appliquer le théorème 4.6.1 et son corollaire, et la propriété d'absolue continuité des limites faible-* reste vraie quand on ajoute un potentiel L^∞.*

Proposition 4.6.2. *La propriété (UI_T) est admissible.*

Démonstration. Pour montrer le point (i), prenons (v_n) et (w_n) deux suites vérifiant (UI_T). Montrons que la suite $(v_n + w_n)$ vérifie (UI_T).

En effet, soit $\epsilon > 0$, et soit $\delta_v > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout A mesurable, avec $|A| < \delta_v$, on a $\int_A |v_n|^2 < \epsilon/4$.

Soit $\delta_w > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout A mesurable, avec $|A| < \delta_w$, on a $\int_A |w_n|^2 < \epsilon/4$.

Posons alors $\delta = min(\delta_v, \delta_w)$. Soit A mesurable, avec $|A| < \delta$. On a $\int_A |v_n + w_n|^2 \leq 2\int_A |v_n|^2 + |w_n|^2 < \epsilon$, ce qui prouve le point (i).

Le point (ii) est ici encore évident.

Prouvons le point (iii). Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe k_0 tel que $\limsup_{n\to\infty} \|v_n - v_n^{(k_0)}\|_{L^2(]0,T[\times\mathbb{T}^d)} < \epsilon/3$. Par conséquent, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $\|v_n - v_n^{(k_0)}\|_{L^2(]0,T[\times\mathbb{T}^d)} < 2\epsilon/3$.

Les fonctions $|v_1|^2, |v_2|^2, ..., |v_{n_0}|^2$ sont dans $L^1(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$, donc il existe, pour tout $1 \leq i \leq n_0$ un $\delta_i > 0$ tel que, pour tout A mesurable, avec $|A| < \delta_i$, on a $\int_A |v_i|^2 < \epsilon/3$.
D'autre part, la suite $(v_n^{(k_0)})$ vérifie (UI_T) par hypothèse. Il existe donc δ_0 tel que, pour tout A mesurable, avec $|A| < \delta_0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_A |v_n^{(k_0)}|^2 < \epsilon/3$.

Notons alors $\delta = min\{\delta_0, \delta_1, ...\delta_{n_0}\}$. On a bien, si $|A| < \delta$, $\int_A |v_n|^2 < \epsilon$ pour tout n.
Ceci conclut bien la preuve du point (iii). □

4.6.2 La loi de propagation

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que le lemme 4.4.1 est encore vrai pour des potentiels beaucoup moins réguliers. Commençons par le cas des potentiels continus.

Proposition 4.6.3. *Le résultat du lemme 4.4.1 est encore vrai si $V \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d)$.*

Démonstration. Dans ce cas, la formule 4.16 est encore vraie, mais on ne peut plus conclure directement en passant à la limite. On utilisera donc un argument d'approximation très simple.

Soit (V_n) une suite de potentiels C^∞ tels que $\|V - V_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{n}$. L'équation 4.16 peut se réécrire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(n^h_{u,\Lambda}(t), K\big) &= i\langle T_\Lambda u_h, [H^\Lambda_{V_n}(t,\cdot), K(hD_s)]T_\Lambda u_h\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))} \\ &\quad + i\langle T_\Lambda u_h, [V - V_n^\Lambda(t,\cdot), K(hD_s)]T_\Lambda u_h\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))}.\end{aligned}$$

Or on a

$$|\langle T_\Lambda u_h, [V - V_n^\Lambda(t,\cdot), K(hD_s)]T_\Lambda u_h\rangle_{L^2(\mathbb{T}_{\Lambda^\perp};L^2(\mathbb{T}_\Lambda))}| \leq 2\|V - V_n\|_{L^\infty} \sup_{\sigma\in\Lambda^\perp} \|K(\sigma)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}_\Lambda))}.$$

D'autre part, en utilisant le lemme 4.4.1, on a, quand $h \longrightarrow 0$:

$$\langle T_\Lambda u_h, [H^\Lambda_{V_n}(t,\cdot), K(hD_s)]T_\Lambda u_h\rangle \longrightarrow Tr \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} [H_{V_n}(t,\cdot), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma).$$

Pour pouvoir remplacer, dans le membre de droite de cette limite, V_n par V, on utilise l'inégalité :

$$\left| Tr \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} [V - V_n, K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma)\right| \leq 2\|V - V_n\|_{L^\infty} \sup_{\sigma\in\Lambda^\perp} \|K(\sigma)\|,$$

qui est vraie car $Tr \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} \tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma) \leq 1$.

On en déduit en faisant tendre h vers 0, puis n vers l'infini, que l'on a au sens des distributions :

$$\frac{d}{dt} Tr \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} K(\sigma)\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma) = iTr \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} [H^\Lambda_V(t,s), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma).$$

On conclut de même que pour la preuve du lemme 4.4.1 : ceci étant vrai pour tout K, on peut enlever la trace. Comme $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}$ est une mesure positive, on peut restreindre le domaine d'intégration à $\mathbb{T}_{\Lambda^\perp} \times R_\Lambda$. Ceci conclut la preuve. □

En fait, dans [AM11b], la loi de propagation est obtenue pour une famille de potentiels encore moins réguliers, satisfaisant la condition suivante.

Définition 4.6.2. *On dit que $V \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d)$. satisfait l'hypothèse **(R)** si, pour tout $T > 0$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_\epsilon \subset [0,T] \times \mathbb{T}^d$ de mesure de Lebesgue $< \epsilon$, et $V_\epsilon \in C([0,T] \times \mathbb{T}^d)$, tels que $|V - V_\epsilon| \leq \epsilon$ sur $([0,T] \times \mathbb{T}^d) \backslash K_\epsilon$.*

Cette condition peut sembler peu intuitive. Il faut bien avoir en tête que c'est le fait que K_ϵ soit compact qui est essentiel dans cette définition. En effet, si on ne faisait pas cette hypothèse, la définition serait toujours vérifiée, comme nous le dit le théorème suivant, dont on peut trouver la preuve dans [Rud86].

Théorème 4.6.2 (Lusin)**.** *Soit Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^d$, et soit $V \in L^\infty(\Omega)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $A_\epsilon \subset \Omega$, avec $|A_\epsilon| < \epsilon$, et une fonction $V_\epsilon \in C(\Omega)$, avec $\|V_\epsilon\|_{L^\infty} < \|V\|_{L^\infty}$, tels que $\|V - V_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega \backslash A_\epsilon)} < \epsilon$.*

L'hypothèse **(R)** est le cadre le plus général dans lequel on sache prouver la loi de propagation.

Proposition 4.6.4. *Le résultat du lemme 4.4.1 est encore vrai si $V \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d)$, et vérifie l'hypothèse **(R)**.*

Démonstration. La formule 4.16 est encore vraie, mais l'argument pour approcher le potentiel V est ici plus subtile que dans la preuve de la proposition précédente. On peut se restreindre à l'étude des $n^h_{u,\Lambda}(t)$ pour $t \in [0,T]$. Fixons un $\epsilon > 0$, et considérons V_ϵ et K_ϵ comme dans la définition ci-dessus. On prend alors un ouvert W_ϵ de mesure de Lebesgue $< 2\epsilon$, tel que $K_\epsilon \subset W_\epsilon$. On peut considérer une fonction χ_ϵ continue, à valeurs dans $[0,1]$, valant 0 sur K_ϵ et valant 1 sur le complémentaire de W_ϵ.
Remarquons que ceci est possible car K_ϵ est fermé. C'est la seule fois où nous nous servirons de l'hypothèse **(R)**.
La formule 4.16 étant encore vraie, on peut s'en servir pour écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(n^h_{u,\Lambda}(t), K\big) = i\langle T_\Lambda u_h(t), [H_{\chi_\epsilon V_\epsilon}(t,\cdot), K(hD_s)]T_\Lambda u_h(t)\rangle \\ +i\langle T_\Lambda u_h(t), [\chi_\epsilon(t)(V(t) - V_\epsilon(t), K(hD_s)]T_\Lambda u_h(t)\rangle \\ +i\langle T_\Lambda u_h(t), [(1-\chi_\epsilon(t))V(t), K(hD_s)]T_\Lambda u_h(t)\rangle \end{aligned} \tag{4.18}$$

Comme $\chi_\epsilon V_\epsilon$ est continue, on peut appliquer le raisonnement de la proposition précédente, en en déduire que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\langle T_\Lambda u_h(t), [H_{\chi_\epsilon V_\epsilon}(t,\cdot), K(hD_s)]T_\Lambda u_h(t)\rangle &= Tr\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} [H_{\chi_\epsilon V_\epsilon}(t,\cdot), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma) \\ &= Tr\int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} [H_{\chi_\epsilon V}(t,\cdot), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$|\langle T_\Lambda u_h(t), [\chi_\epsilon(t)(V(t) - V_\epsilon(t), K(hD_s)]T_\Lambda u_h(t)\rangle| \leq 2\epsilon \sup_{\sigma\in\Lambda^\perp} \|K(\sigma)\|.$$

Il nous reste à estimer le dernier terme dans 4.18. On a :

$$|\langle T_\Lambda u_h(t), [(1-\chi_\epsilon(t))V(t), K(hD_s)]T_\Lambda u_h(t)\rangle| \leq 2\|V\|_{L^\infty} \sup_{\sigma\in\Lambda^\perp} \|K(\sigma)\|\|u_h(t)\|\|(1-\chi_\epsilon(t))u_h(t)\|.$$

On intègre contre une fonction $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, et on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T \phi(t)\langle T_\Lambda u_h(t), [(1-\chi_\epsilon(t))V(t), K(hD_s)]T_\Lambda u_h(t)\rangle dt\Big| \\
&\leq 2\|V\|_{L^\infty} \sup_{\sigma\in\Lambda^\perp} \|K(\sigma)\| \int_0^T |\theta(t)|\|u_h(t)\|\|(1-\chi_\epsilon(t))u_h(t)\| \\
&\leq 2\|V\|_{L^\infty} \sup_{\sigma\in\Lambda^\perp} \|K(\sigma)\| \Big(\int_0^T |\theta(t)|\|u_h(t)\|^2 dt\Big)^{1/2} \Big(\int_0^T |\theta(t)|\|(1-\chi_\epsilon(t))u_h(t)\|^2 dt\Big)^{1/2} \\
&= 2\|V\|_{L^\infty} \sup_{\sigma\in\Lambda^\perp} \|K(\sigma)\| \Big(\int_0^T |\theta(t)| dt\Big)^{1/2} \Big(\int_0^T |\theta(t)|\|(1-\chi_\epsilon(t))u_h(t)\|^2 dt\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On peut alors utiliser le fait que χ_ϵ soit continue pour appliquer le théorème 4.1.1, et dire que, quitte à extraire, on a

$$\lim_{h\to 0} \int_0^T |\theta(t)|\|(1-\chi_\epsilon(t))u_h(t)\|^2 dt = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} |\theta(t)||1-\chi_\epsilon(t,x)|^2 \nu_t(dx)dt,$$

où, pour presque tout t, ν_t est une mesure de probabilité absolument continue. On a donc

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} |\theta(t)||1-\chi_\epsilon(t,x)|^2 \nu_t(dx)dt = 0.$$

En combinant toutes ces informations, l'équation 4.18 nous donne :

$$\frac{d}{dt} Tr \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} K(\sigma)\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma) = iTr \int_{T^*\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} [H^\Lambda_{\chi_\epsilon V}(t,s), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma) + \sup_{\sigma\in\Lambda^\perp} \|K(\sigma)\| R_\epsilon, \tag{4.19}$$

où R_ϵ est indépendant de K, et tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. De même que dans la preuve de la proposition précédente, on peut limiter les intégrales à $\mathbb{T}_{\Lambda^\perp} \times R_\Lambda$ dans 4.19, car la formule est vraie pour tout K, et car $\tilde{\rho}_{u,\Lambda}$ est positive.

Pour conclure la preuve, il nous faut donc montrer que

$$Tr \int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda} [H^\Lambda_{\chi_\epsilon V}(t,s), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma) = Tr \int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda} [H^\Lambda_V(t,s), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma) + R'_\epsilon,$$

où R'_ϵ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0.

Etudions donc

$$Tr \int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}\times R_\Lambda} [V(t)(1-\chi_\epsilon(t)), K(\sigma)]\tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t,ds,d\sigma).$$

Limitons nous à l'étude du premier terme du commutateur, celle du second s'effectuant de manière analogue.

Le même argument que celui ayant permis de conclure à l'absolue continuité de $\tilde{\mu}_{u,\Lambda}$ nous dit que la mesure

$$a \in C([0,T] \times \mathbb{T}^d) \mapsto \int_0^T \theta(t) Tr\Big(m_a \int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp} \times R_\Lambda} K(\sigma) \tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma) dt \Big)$$

est absolument continue. On en déduit bien que

$$\lim_{\epsilon \to 0} Tr \int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp} \times R_\Lambda} V(t)(1-\chi_\epsilon(t)) K(\sigma) \tilde{\rho}_{u,\Lambda}(t, ds, d\sigma) = 0,$$

car la mesure du support de la fonction continue $V(t)(1-\chi_\epsilon(t))$ tend vers 0 avec ϵ. La preuve de la proposition en découle. $\square$

Il est conjecturé que la loi de propagation reste vraie pour n'importe quel potentiel L^∞.

Une manière de prouver cette conjecture serait de prouver la conjecture **(U)**. En effet, nous avons vu que si l'on pouvait montrer l'uniforme intégrabilité des solutions à l'équation de Schrödinger sans potentiel, on l'obtiendrait pour les solutions avec des potentiels peu réguliers. Or, le seul endroit dans la preuve de la proposition 4.6.4 où l'on utilise l'hypothèse **(R)** est pour avoir une fonction cut-off continue. Si on avait l'hypothèse d'uniforme intégrabilité, on aurait de la compacité L^1 faible, et on n'aurait plus besoin d'avoir des fonctions continues, mais seulement mesurables. Il serait alors possible d'adapter la preuve précédente pour se passer de l'hypothèse **(R)**.

Cependant, l'hypothèse **(R)** ne semble pas facile à prouver avec les méthodes à notre disposition. En effet, on a tendance à prendre d'abord la limite $h \longrightarrow 0$, puis à étudier les éventuelles propriétés de régularité de la limite. Ceci ne peut pas nous garantir l'uniforme intégrabilité.

4.6.3 Propriétés de $\bar{\mu}_u$

Par les mêmes arguments que ci-dessus, nous allons prouver la proposition 4.5.1 dans le cas d'un potentiel peu régulier.

Lemme 4.6.1. *La proposition 4.5.1 est encore vraie si* $V \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d)$.

Démonstration. On a encore

$$\langle U_V(T)u_h, a(hD_x)U_V(T)u_h\rangle dt - \langle u_h, a(hD_x)u_h\rangle = -i \int_0^T \langle U_V(t)u_h, \Big[a(hD_x), V\Big] U_V(t)u_h\rangle dt,$$

il nous faut donc montrer que

$$\lim_{h\to 0} \|[a(hD_x), V]\|_{L^2(\mathbb{T}^d)\to L^2(\mathbb{T}^d)} = 0.$$

On considère une suite de potentiels $V_n \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d)$ tels que $\|V_n - V\|_\infty \to 0$.

On a

$$[a(hD_x), V] = [a(hD_x), V_n] + [a(hD_x), V - V_n].$$

D'une part, par la proposition 4.5.1, $\lim\limits_{h\to 0} \|[a(hD_x), V_n]\|_{L^2(\mathbb{T}^d)\to L^2(\mathbb{T}^d)} = 0$ pour tout n.

D'autre part,

$$\|[a(hD_x), V - V_n]\|_{L^2(\mathbb{T}^d)\to L^2(\mathbb{T}^d)} \leq 2\|a(hD_x)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)\to L^2(\mathbb{T}^d)} \|V - V_n\|_{L^\infty},$$

et la preuve du lemme en découle. $\square$

Proposition 4.6.5. *La proposition 4.5.1 est encore vraie si $V \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d)$ et si V vérifie l'hypothèse* ***(R)***.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 4.6.4. On a

$$\int_0^T \langle U_V(t)u_h, \Big[a(hD_x), V\Big] U_V(t)u_h\rangle dt = \int_0^T \langle U_V(t)u_h, \Big[a(hD_x), V_{\epsilon\chi_\epsilon}\Big] U_V(t)u_h\rangle dt$$
$$+ \int_0^T \langle U_V(t)u_h, \Big[a(hD_x), (V - V_\epsilon)\chi_\epsilon\Big] U_V(t)u_h\rangle dt + \int_0^T \langle U_V(t)u_h, \Big[a(hD_x), V(1-\chi_\epsilon)\Big] U_V(t)u_h\rangle dt,$$

et on traite chacun des termes de la même manière que dans la preuve de la proposition 4.6.4. $\square$

Chapitre 5

Estimées d'observabilité

Dans tout ce chapitre, nous supposerons que le potentiel V est indépendant du temps, est dans $L^\infty(\mathbb{T}^d)$, et vérifie l'hypothèse **(R)**. Nous nous proposerons de montrer le théorème suivant :

Théorème 5.0.3. *Soit $T > 0$ et ω un ouvert de $\mathbb{T}^d$. Il existe C tel que, pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$, on a :*

$$\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq C \int_0^T \|U_V(t)u_0\|^2_{L^2(\omega)} dt$$

Une telle inégalité est appellée une *estimée d'observabilité*. Elle nous dit qu'en ayant observant une solution de l'équation de Schrödinger sur un petit ouvert pendant un court temps, on peut avoir des informations sur la norme globale de la solution.

Une telle estimée est reliée à d'autres questions relatives à l'équation de Schrödinger et à l'équation des ondes. Tout d'abord, elle implique la contrôlabilité de l'équation de Schrödinger. C'est à dire que, pour toute paire de fonctions u_1, u_2 dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ et pour tout temps $T > 0$, il est possible de trouver une fonction $f \in L^\infty([0,T]; L^2(\mathbb{T}^d))$ telle que si $\psi \in C([0,T]; L^2(\mathbb{T}^d))$ est la solution de l'équation

$$\begin{cases} -i\partial_t \psi - \Delta\psi + V(x)\psi = f \\ \psi(t=0) = u_0 \end{cases}$$

Alors on a $\psi(t = T) = u_1$. Autrement dit, en choisissant bien le contrôle f, on peut envoyer la fonction u_0 sur la fonction u_1 par le flot de Schrödinger. Pour plus de détails sur ce sujet, le lecteur intéressé peut voir les références se trouvant dans [BZ11]

Un tel résultat permet aussi d'obtenir une minoration sur la vitesse de décroissance de l'énergie pour l'équation des ondes amorties. Ceci est bien expliqué dans l'article[ALN12].

L'estimée d'observabilité est vraie sur toute variété riemannienne compacte si l'on fait sur ω l'hypothèse de contrôle géométrique, c'est à dire si l'on suppose qu'il existe un temps $t_0 > 0$ tel que toutes les géodésiques ayant une vitesse 1 intersectent ω en un temps plus petit que ω.

L'originalité de ce résultat est que nous n'avons pas besoin de l'hypothèse de contrôle géométrique. L'idée sous-jacente est que seul un nombre fini de vitesses engendrent des géodésiques n'intersectant pas ω en un temps fini.

En utilisant un argument, appelé argument de compacité-unicité, dû à Bardos, Lebeau et Rauch ([BLR92]) et une décomposition de Littlewood-Payley, on obtient que pour obtenir une telle inégalité pour toute condition initiale, il suffit d'avoir une telle estimée pour des conditions initiales oscillant très rapidement, comme nous donne la proposition suivante.

Soit $\chi \in C_c^\infty(\frac{1}{2}, 2))$ une fonction de troncature telle que $\chi = 1$ sur $\left]\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right[$. On définit, pour $h > 0$,

$$\Pi_h u_0 := \chi\Big(h^2(-\frac{1}{2}\Delta + V)\Big)u_0.$$

Proposition 5.0.6. *Soit $T > 0$ et ω un ouvert de $\mathbb{T}^d$. Il existe $C, h_0 > 0$ tels que, pour tout $0 < h < h_0$ et tout $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$, on a :*

$$\|\Pi_h u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq C \int_0^T \|U_V(t)\Pi_h u_0\|^2_{L^2(\omega)} dt$$

Ce chapitre sera divisée en deux parties : tout d'abord, nous présenterons comment on peut déduire le théorème 5.0.3 de la proposition 5.0.6. Nous suiverons pour cela la présentation faite dans l'article [BZ11]. Ensuite, nous donnerons une preuve de la proposition 5.0.6, basée sur les résultats précédents issus de la deuxième micro-localisation, qui provient de l'article [AM11b].

5.1 Preuve de l'observabilité à partir de l'estimée haute fréquence

Proposition 5.1.1. *Soit $T > 0$ et ω un ouvert de $\mathbb{T}^d$. Il existe C telle que, pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$, on a :*

$$\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq C\Big(\int_0^T \|U_V(t)u_0\|^2_{L^2(\omega)} dt + \|u_0\|^2_{H^{-2}(\mathbb{T}^d)}\Big)$$

Démonstration. Soit $\phi \in C_c^\infty\left(\left]\frac{1}{2}, 2\right[; [0, 1]\right)$, telle que l'on ait la partition de l'unité suivante :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \qquad 1 = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(r)^2$$

où $\phi_j(r) = \phi(2^{-j}|r|)$. Par le calcul symbolique des opérateurs auto-adjoints, on en déduit donc que :

$$Id = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(H_V)^2.$$

En appliquant cette égalité entre opérateurs à u_0, puis en prenant le produit scalaire avec u_0, on en déduit que :

$$\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \sum_{j=0}^{\infty} \|\phi_j(H_V)u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

Considérons maintenant une fonction de troncature en temps, $\psi \in C_c^\infty(]0; T[; [0; 1])$, telle que $\psi(t) > 1/2$ sur $\left]\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right[$.

Remarquons que, comme l'opérateur $U_V(t)$ est unitaire, la proposition 5.0.6 est encore vraie en remplaçant l'intégrale de 0 à T par une intégrale sur $\left]\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right[$. En particulier, on a une constante C telle que, pour $0 < h < h_0$:

$$\|\Pi_h u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq C \int_{\mathbb{R}} \psi(t)^2 \|U_V(t)\Pi_h u_0\|^2_{L^2(\omega)} dt$$

Or il existe un K tel que $2^{-Kj} < h_0$, et donc pour tout $j > K$ et $u \in L^2(\mathbb{T}^d)$, on a

$$\Pi_{h_0}\phi_j(H_V)u = \phi_j(H_V)u.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} &= \sum_{j=0}^{K} \|\phi_j(H_V)u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \|\phi_j(H_V)u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\
&= \sum_{j=0}^{K} \|\phi_j(H_V)u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \|\Pi_h\phi_j(H_V)u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{K} \|\phi_j(H_V)u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + C\sum_{j=K+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi(t)^2 \|U_V(t)\Pi_{h_0}\phi_j(H_V)u_0\|^2_{L^2(\omega)}dt \\
&= \sum_{j=0}^{K} \|\phi_j(H_V)u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + C\sum_{j=K+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\psi(t)\phi_j(H_V)U_V(t)u_0\|^2_{L^2(\omega)}dt
\end{aligned}$$

On aimerait pouvoir écrire $\psi(t)\phi_j(H_V) = \phi_j(H_V)\psi(t)$, afin d'utiliser la partition de l'unité et de conclure. Toutefois, ces deux opérateurs ne commutent pas exactement, car $\phi_j(H_V)U_V(t) = \phi_j(\partial_t)U_V(t)$ agit sur les fonctions de t.

L'objet des calculs suivant est de montrer que ce commutateur n'est pas trop grand.

On peut définir une quantification de Weyl sur les fonctions $a(t,\tau)$ dans $C_c^\infty(T^*\mathbb{R})$. On notera $\tilde{Op}$ cette quantification de Weyl.

Notons $\eta_j = 2^{-j}$. On a alors

$$\phi_j(\partial_t) = \tilde{Op}_{\eta_j}(\phi(\tau)).$$

Soit $\tilde{\psi} \in C_c^\infty(]0,T[;[0,1])$, telle que $\tilde{\psi} = 1$ sur $spt(\psi)$. On peut écrire

$$\psi(t)\phi_j(\partial_t) = \psi(t)\phi_j(\partial_t)\tilde{\psi}(t) + \psi(t)\phi_j(\partial_t)(1-\tilde{\psi}(t)).$$

Or on a $\psi(t)\phi_j(\partial_t) = Op_{\eta_j}\big(\psi(t)\#\phi(\tau)\big)$. On vérifie sans peine à partir de la formule 2.3 que $spt\big(\psi(t)\#\phi(\tau)\big) \subset spt(\psi) \times \mathbb{R}$, et donc :

$$spt\big(\psi(t)\#\phi(\tau)\big) \cap spt(1-\psi) = \emptyset.$$

On en déduit, par le point (iii) du corollaire 2.1.1, que

$$\psi(t)\phi_j(\partial_t)(1-\tilde{\psi}(t)) = O_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))}(\eta_j^\infty)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} &\leq C\|u_0\|^2_{H^{-2}} + C\sum_{j=K+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\psi(t)\phi_j(H_V)U_V(t)u_0\|^2_{L^2(\omega)}dt \\
&\leq C\|u_0\|^2_{H^{-2}} + C\sum_{j=K+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\psi(t)\phi_j(H_V)\tilde{\psi}(t)U_V(t)u_0\|^2_{L^2(\omega)}dt \\
&\quad + C\sum_{j=K+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\psi(t)\phi_j(H_V)(1-\tilde{\psi}(t))U_V(t)u_0\|^2_{L^2(\omega)}dt
\end{aligned}$$

En prenant K assez grand, ce dernier terme peut être rendu plus petit que $C\|u_0\|^2_{H^{-2}}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} &\leq C'\|u_0\|^2_{H^{-2}} + C\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} \|\psi(t)\phi_j(H_V)\tilde{\psi}(t)U_V(t)u_0\|^2_{L^2(\omega)}dt \\ &\leq C'\|u_0\|^2_{H^{-2}} + C\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} \|\phi_j(H_V)\tilde{\psi}(t)U_V(t)u_0\|^2_{L^2(\omega)}dt \\ &= C'\|u_0\|^2_{H^{-2}} + C\sum_{j=0}^{\infty}\langle\phi_j(H_V)^2\tilde{\psi}(t)U_V(t)u_0, \tilde{\psi}(t)U_V(t)u_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}_t\times\omega)} \\ &= C'\|u_0\|^2_{H^{-2}} + C\langle\tilde{\psi}(t)U_V(t)u_0, \tilde{\psi}(t)U_V(t)u_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}_t\times\omega)} \\ &\leq C'\|u_0\|^2_{H^{-2}} + C\int_0^T \|U_V(t)u_0\|^2_{L^2(\omega)}dt\end{aligned}$$

□

L'argument de compacité-unicité Notons, pour $\delta \geq 0$,

$$N_\delta := \{u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d); U_V(t)u_0 \equiv 0 \text{ sur}]0, T-\delta[\times\omega\}.$$

Remarquons que N_δ est un espace vectoriel, fermé pour la convergence L^2 forte.

Proposition 5.1.2. $N_0 = \{0\}$

Démonstration. Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 5.1.1. *N_0 est stable par H_V.*

Démonstration. Soit $u_0 \in N_0$. On écrira :

$$v_{\epsilon,0} = \frac{1}{\epsilon}\Big(U_V(\epsilon) - Id\Big)u_0.$$

Remarquons que, dès que $\epsilon \leq \delta$, on a, pour tout $0 < t < T-\delta$, $U_V(t)v_{\epsilon,0} \in N_\delta$.

H_V est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte de $L^2(\mathbb{T}^d)$. Il existe donc une base orthonormale (e_n) de $L^2(\mathbb{T}^d)$, et des réels (λ_n) tels que $H_V e_n = \lambda_n e_n$. On écrit alors :

$$u_0 = \sum_n u_{0,n}e_n,$$

et on a

$$H_V v_{\epsilon,0} = \sum_n \frac{e^{-i\epsilon\lambda_n} - 1}{\epsilon}u_{0,n}e_n,$$

Prenons $0 < \alpha, \beta < T/2$, et appliquons la proposition 5.1.1 à $v_{\alpha,0} - v_{\beta,0}$, avec T remplacé par $T/2$.

Comme $v_{\alpha,0}$ et $v_{\beta,0}$ sont dans $N_{T/2}$, le second terme s'annule, et on a :

$$\begin{aligned}
\|v_{\alpha,0}-v_{\beta,0}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} &\le C\|v_{\alpha,0}-v_{\beta,0}\|^2_{H^{-2}} \\
&= \sum_n \Big|\frac{e^{-i\alpha\lambda_n}-1}{\alpha}-\frac{e^{-i\beta\lambda_n}-1}{\beta}\Big|^2(1+\lambda_n)^{-2}u_{0,n}^2 \\
&\le C'\sum_n \lambda_n^2(\alpha-\beta)^2(1+\lambda_n)^{-2}u_{0,n}^2 \\
&\le C'(\alpha-\beta)^2
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite (v_{α_0}) est de Cauchy quand $\alpha_0 \to 0$, et donc converge pour la topologie L^2-forte. Notons v_0 sa limite. v_0 est dans tous les N_δ, et donc est dans N_0.
Or, par définition de v_{α_0}, on a, au sens des distributions

$$U_V(t)v_0 = \delta_t u_0,$$

et donc

$$v_0 = -iH_V u_0.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. □

On sait, par la proposition 5.1.1 que, sur N_0, $\|\cdot\|_{H^{-2}(\mathbb{T}^d)}$ est une norme. Or, comme l'injection de $L^2(\mathbb{T}^d)$ dans $H^{-2}(\mathbb{T}^d)$ est compacte, on en déduit que la boule unité dans N_0 est compacte pour la norme $\|\cdot\|_{H^{-2}(\mathbb{T}^d)}$. Par conséquent, N_0 doit être de dimension finie.

Par le lemme précédent, H_V est un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe de dimension finie N_0. Par conséquent, il doit avoir un vecteur propre, que nous noterons w. Il existe un complexe ν tel que

$$\begin{cases} (-\Delta+V)w = \nu w \text{ sur } \mathbb{T}^d \\ w = 0 \text{ sur } \omega \end{cases}$$

Par des arguments classiques sur les équations elliptiques (par exemple, par le principe du maximum fort), on conclut que $w=0$, et donc que $N_0=\{0\}$. □

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème 5.0.3.

Démonstration. Supposons qu'il n'existe pas de telle majoration. On pourrait alors construire une suite $u_{0,n} \in L^2(\mathbb{T}^d)$, avec $\forall n, \|u_{0,n}\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} = 1$, et telle que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_\omega |U_V(t)u_{n,0}|^2 dxdt = 0.$$

On peut extraire une sous-suite, que l'on écrira toujours $(u_{n,0})$, qui converge faiblement dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. On a alors une convergence forte dans $H^{-2}(\mathbb{T}^d)$. Notons u_0 la limite. On a $u_0 \in N_0$. Par la proposition 5.1.1, on a

$$\|u_{n,0}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} = 1 \le C\Big(\int_0^T \|U_V(t)u_{n,0}\|^2_{L^2(\omega)}dt + \|u_{n,0}\|^2_{H^{-2}(\mathbb{T}^d)}\Big)$$

En passant à la limite dans cette expression, on en déduit que

$$1 \leq C\|u_0\|_{H^{-2}(\mathbb{T}^d)}$$

Par conséquent, on a une fonction $u_0 \in N_0$ différente de 0. Ceci contredit la proposition 5.1.2, et termine la preuve du théorème. □

5.2 Preuve de l'estimée haute fréquence

Rappelons que la proposition que nous devons montrer est la suivante :

Soit $T > 0$ et ω un ouvert de $\mathbb{T}^d$. Il existe $C, h_0 > 0$ tels que, pour tout $0 < h < h_0$ et tout $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$, on a :

$$\|\Pi_h u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq C \int_0^T \|U_V(t)\Pi_h u_0\|^2_{L^2(\omega)} dt$$

Démonstration. Nous prouverons le résultat par récurrence, et par l'absurde. Nous supposerons que le résultat est vrai pour tous les tores rationnels de dimension $d' < d$, et nous supposerons que le résultat est faux pour le tore de dimension d.

Il existe donc une suite h_n qui tend vers 0, et une suite de conditions initiales $u_{0,n}$ normalisées dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ telle que $\Pi_{h_n} u_{0,n} = u_{0,n}$, et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|U_V(t)u_{0,n}\|^2_{L^2(\omega)} dt = 0.$$

On peut extraire une sous-suite, et supposer que $(u_{0,n})$ admet une mesure semi-classique initiale $\mu_{u,0}$, et une mesure semi-classique dépendante du temps, $\mu_u \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{M}_+(T^*\mathbb{T}^d))$. On a alors, par construction,

$$\mu_{u,0}(T^*\mathbb{T}^d) = 1, \quad \mu_{u,0}(\mathbb{T}^d \times \{0\}) = 0. \tag{5.1}$$

Par la proposition 4.5.1, ceci est encore vrai pour $\mu_u(t, \cdot)$ pour presque tout t.

D'autre part, on a

$$\int_0^T \mu_u(t, \omega \times \mathbb{R}^d) dt = 0. \tag{5.2}$$

Par le théorème 4.5.1, on a pour tout $b \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$

$$\int_{T^*\mathbb{T}^d} b(x)\mu_u(t, dx, d\xi) = \sum_\Lambda \int_{\mathbb{T}^d} b(x)\nu_{u,\Lambda}(t, dx) = \sum_\Lambda Tr\big(m_{\langle b\rangle_\Lambda} U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)\sigma_{u,\Lambda} U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)^*\big).$$

Si $\Lambda = 0$, la mesure $\nu_{u,\Lambda}$ est constante en x, et comme on a par hypothèse $\nu_{u,\Lambda}(t, \omega) = 0$, on a $\nu_{u,\Lambda}(t) = 0$.

Si $\Lambda = \mathbb{Z}^d$, on sait que $\mu_u(t, \mathbb{T}^d \times \{0\})$, et donc par le corollaire 4.5.1, on a $\sigma_{u,\Lambda} = 0$.

Soit $\Lambda \neq 0$, $\Lambda \neq \mathbb{Z}^d$. On peut appliquer notre hypothèse de récurrence au tore $\mathbb{T}_\Lambda$. Le théorème 5.0.3 est alors vrai pour $\mathbb{T}_\Lambda$.

L'hypothèse 5.2 se traduit en disant que :

$$\int_0^T Tr\Big(m_{\langle \mathbf{1}_\omega\rangle_\Lambda} U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)\sigma_{u,\Lambda} U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)^*\Big) dt = 0.$$

Autrement dit,

$$\int_0^T Tr\Big(m_{\mathbf{1}_{\langle\omega\rangle_\Lambda}} U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)\sigma_{u,\Lambda}U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)^*\Big)dt = 0,$$

où $\langle\omega\rangle_\Lambda$ est le support de $\langle\mathbf{1}_\omega\rangle_\Lambda$.

D'autre part, $\sigma_{u,\Lambda}$ étant un opérateur à trace, il est compact. On peut donc le décomposer comme

$$\sigma_{u,\Lambda} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|,$$

où ϕ_n est une fonction propre de $\sigma_{u,\Lambda}$ normalisée dans L^2, et $|\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ est le projecteur associé. On a $\sum\lambda_n < \infty$.

On peut alors appliquer le théorème 5.0.3 à chacun des ϕ_n. On a

$$1 \leq C\int_0^T \|U_V(t)\phi_n\|^2_{L^2(\omega)}dt,$$

et donc

$$Tr(\sigma_{u,\Lambda}) \leq C\int_0^T Tr\Big(m_{\mathbf{1}_{\langle\omega\rangle_\Lambda}} U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)\sigma_{u,\Lambda}U_{\langle V\rangle_\Lambda}(t)^*\Big)dt.$$

Par conséquent, $\sigma_{u,\Lambda} = 0$. Ceci étant vrai pour tout Λ, on a $\mu_u(t, T^*\mathbb{T}^d) = 0$. Ceci est en contradiction avec le fait que $\mu_u(t, T^*\mathbb{T}^d) = 1$.

Pour conclure la preuve, il nous reste à traiter le cas où $d = 1$. On raisonne par l'absurde comme précédemment, et on obtient une mesure semi-classique μ vérifiant 5.1 et 5.2. On sait que $\mu_u(t,\cdot)$ est invariante par le flot géodésique. Or $\mu_u(t, \mathbb{T}\times\{0\}) = 0$ donc $\mu_u(t,\cdot)$ est uniforme sur $\mathbb{T}$. Comme cette mesure accorde une masse nulle à l'ouvert ω, elle est nécessairement nulle. Ceci contredit l'hypothèse que $\mu_u(t, T^*\mathbb{T}^d) = 1$, et termine la preuve de la proposition. □

Nous conclurons en disant que, là encore, il serait possible de se passer de l'hypothèse **(R)** si on savait prouver la conjecture **(U)**. Par des méthodes complètement différentes de celles présentées dans ce mémoire, Bourgain, Burq et Zworski ont réussi dans [BBZ13] à prouver la proposition 5.0.6, et donc le théorème 5.0.3 dans le cas d'un potentiel L^2 en dimension deux. Il est conjecturé que l'estimée d'observabilité reste vraie sur $\mathbb{T}^d$ en toute dimension, pour tout potentiel ayant une régularité au moins L^{p_d}, où p_d croît avec d, et tend vers l'infini quand $d \longrightarrow \infty$.

Bibliographie

[AFKM11] N. Anantharaman, C. Fermanian-Kammerer, and F. Macià. Long-time dynamics of completely integrable schrödinger flows on the torus. 2011. Preprint arXiv :1005.0296.

[AJM12] T. Aïssiou, D ; Jakobson, and F. Macià. Uniform estimates for the solutions of the schrödinger equation on the torus and regularity of semiclassical measures. 2012. Preprint arXiv :1110.6521v2.

[ALN12] N. Anantharaman, M. Léautaud, and S. Nonnenmacher. Decay rates for the damped wave equation on the torus. 2012. Preprint arXiv :1210.6879v1.

[AM11a] N. Anantharaman and F. Macià. The dynamics of the schrödinger flow from the point of view of semiclassical measures. 2011. Preprint arXiv :1102.0970v1.

[AM11b] N. Anantharaman and F. Macià. Semiclassical measures for the schrödinger equation on the torus. 2011. Preprint arXiv :1005.0296.

[BBZ13] J. Bourgain, N. Burq, and M. Zworski. Control for schrödinger operators on 2-tori : Rough potentials. 2013. Preprint arXiv :1301.1282v1.

[Bel07] Michel Le Bellac. *Physique Quantique*. CNRS Editions, 2007.

[BLR92] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30(5) :1024–1065, 1992.

[Bou93] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. i. schrödinger equations. *Geom. Func. Anal.*, 2 :107–156, 1993.

[Bou97] J. Bourgain. Analysis results and problems related to lattice points on surfaces. *Contemp. Math.*, 208 :85–109, 1997.

[Bou07] J. Bourgain. On strichartz's inequalities and the nonlinear schrödinger equation on irrationnal tori. *Ann. of Math. Stud.*, 163 :1–20, 2007.

[Bur12] N. Burq. Semi-classical measures for inhomogeneous schrödinger equations on tori. 2012. Preprint arXiv :1209.3739v2.

[BZ11] N. Burq and M. Zworski. Control for schrödinger operators on tori. 2011. Preprint arXiv :1106.1412v1.

[CTDF97] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F.Laloë. *Mécanique quantique*. Hermann, 1997.

[GS13] V. Guillemin and S. Sternberg. Semiclassical analysis. 2013. math.mit.edu/ vwg/semistart.pdf.

[Mac09] F. Macià. Semiclassical measures and the schrödinger flow on riemannian manifolds. *Nonlinearity*, 22(5) :1003–1020, 2009.

[Mac10] F. Macià. High-frequency propagation for the schrödinger equation on the torus. *J. Funct. Anal.*, 258(3) :933–955, 2010.

[Rud86] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics, 1986.

[Zwo12] Maciej Zworski. *Semiclassical Analysis.* AMS, 2012.

[Zyg74] A. Zygmund. On fourier coefficients and transforms of functions of two variables. *Studia Math.*, 50 :189–201, 1974.