Solutions de quelques exercices.

① Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ est-ce que $\left|\frac{iz+1}{iz+i}\right| = 1$? Dessiner vos solutions dans le plan cartésien.

Solution : $\left|\frac{iz+1}{iz+i}\right| = 1 \iff |iz+1| = |iz+i|$

Pour calculer le module de $iz+1$ et de $iz+i$, il faut qu'on l'écrive sous forme algébrique. On pose $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

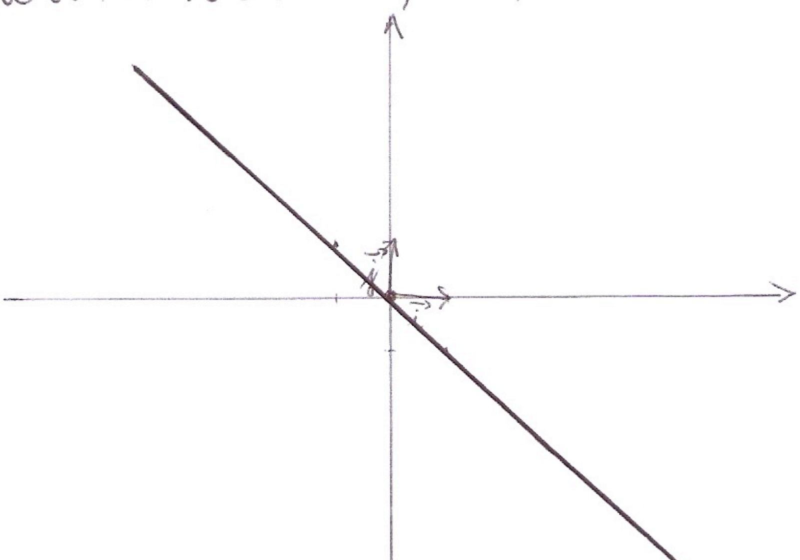
On a $|iz+1| = |ia-b+1| = \sqrt{(1-b)^2+a^2}$

et $|iz+i| = |ia-b+i| = \sqrt{(-b)^2+(a+1)^2}$.

Donc

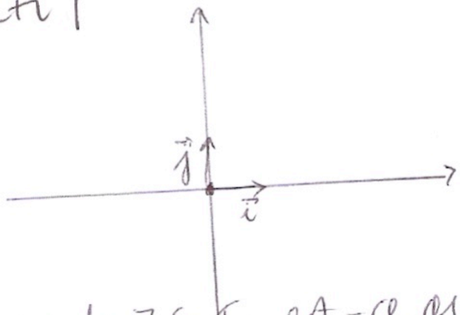
$$|iz+1| = |iz+i|$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{(1-b)^2+a^2} = \sqrt{(-b)^2+(a+1)^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$(1-b)^2+a^2 = b^2+(a+1)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$1-2b+b^2+a^2 = b^2+a^2+2a+1$$
$$\Updownarrow$$
$$-b = a$$

Nous avons donc trouvé que $\left|\frac{iz+1}{iz+i}\right| = 1$ si et seulement si $z = a - ai$, $a \in \mathbb{R}$.



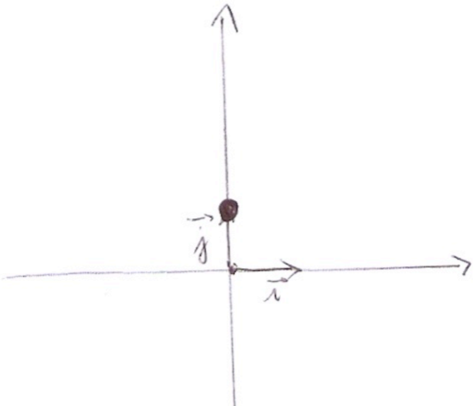
② Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ est-ce que $\left|\dfrac{iz+1}{iz+i}\right| = -1$?
Dessiner vos solutions dans le plan cartésien.

Solution : $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \in \mathbb{R}^+$ par définition du module.
Il n'existe donc pas de $z \in \mathbb{C}$ tel que
$$\left|\frac{iz+1}{iz+i}\right| = -1.$$



③ Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ est-ce que $\left|\dfrac{iz+1}{iz+i}\right| = 0$?
Dessiner vos solutions dans le plan cartésien.

Solution : $\left|\dfrac{iz+1}{iz+i}\right| = 0 \iff |iz+1| = 0$ et $|iz+i| \neq 0$
$\iff iz+1 = 0$ et $iz+i \neq 0$
$\iff iz+1 = 0$
$\iff z = i$



④ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^3+1)(z^3+27)=0$.
Combien de solutions sont réelles ?

<u>Solution</u> : $(z^3+1)(z^3+27)=0$

$$\Updownarrow$$

$$z^3=-1 \text{ ou } z^3=-27$$

Nous cherchons donc les racines cubiques de -1 et de -27. On écrit $z=\rho e^{i\theta}$, $\rho\in\mathbb{R}^+$, $\theta\in\mathbb{R}$.

$*\ z^3=-1 \Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta}=-1 \Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta}=e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow \rho=1$ et $3\theta=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Les racines cubiques de -1 sont donc

$$e^{i\pi/3},\ e^{i\pi},\ e^{i5\pi/3}$$

$*\ z^3=-27 \Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta}=-27 \Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta}=27e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow \rho=3$ et $3\theta=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Les racines cubiques de -27 sont donc

$$3e^{i\pi/3},\ 3e^{i\pi},\ 3e^{i5\pi/3}$$

Les solutions réelles sont $e^{i\pi}=-1$ et $3e^{i\pi}=-3$.

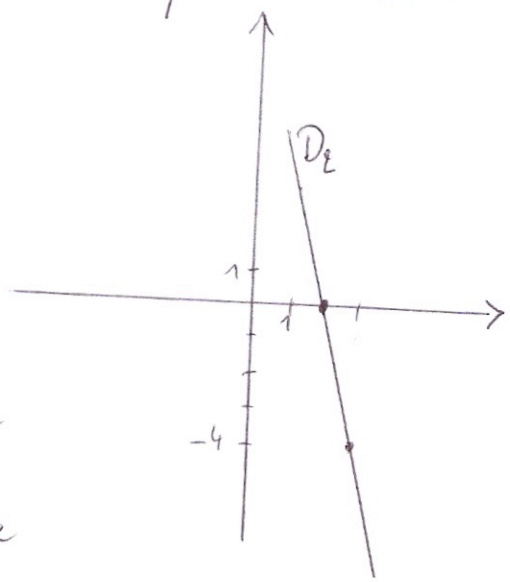
Soit D_1 la droite de vecteur directeur $(1,-4)$ passant par le point $(4,1)$. Soit D_2 la droite donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 + t/3 \\ y = -4t/3 \end{cases}$$

Soit D_3 la droite passant par les points $(4,1)$ et $(12,3)$.

(a) Dessiner dans le plan cartésien la droite D_2.

Solution :



Si $t=0$, on trouve que $A(2,0) \in D_2$

Si $t=3$, on trouve que $B(3,-4) \in D_2$.

(b) Déterminer si D_1, D_2 et D_3 sont sécantes, disjointes ou confondues.

Comme on a que $\vec{v_{D_1}}(1,-4)$, $\vec{v_{D_2}}(1,-4)$, $\vec{v_{D_3}}(4,1)$, on peut conclure que D_1 et D_2 sont parallèles, D_1 et D_3 sont sécantes, D_2 et D_3 sont sécantes.

Pour voir si D_1 et D_2 sont disjointes ou confondues, on prend un point de D_1, par exemple le point $A(4,1)$ et nous cherchons si $A(4,1)$ appartient aussi à D_2.

Est-ce qu'il existe $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} 4 = 2 + t/3 \\ 1 = -4t/3 \end{cases}$?

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = t/3 \\ t = -3/4 \end{cases}$$

Comme il n'y a pas de solution, on conclut que $A(4,1) \notin D_2$ et donc D_1 et D_2 sont disjointes

(c) Soit M le point de cordonnées (1,4). Donner l'équation cartésienne de la droite parallèle à la droite D_3 passant par le point M.

<u>Solution</u> : Deux droites qui sont parallèles ont les mêmes vecteurs directeurs.

$\vec{v}_{D_3}(4,1)$, donc la solution est

$$1.(x-1) - 4(y-4) = 0$$

$$x - 4y + 15 = 0$$

⑥ Déterminer les nombres complexes z pour lesquels

$$iz^4 + (1-5i)z^3 + (6i-2)z^2 = 0.$$

<u>Solution</u> : $iz^4 + (1-5i)z^3 + (6i-2)z^2 = 0$

$$\Updownarrow$$

$z = 0$ ou $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$

Nous allons résoudre cette équation du second degré.

Le discriminant $\Delta = (1-5i)^2 - 4.i.(6i-2)$

$= 1 - 10i - 25 + 24 + 8i$

$= -2i$

Nous cherchons maintenant une racine carrée δ de Δ.

Soit $\delta = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$\delta^2 = \Delta = -2i \Leftrightarrow (x+iy)^2 = -2i$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = -2i$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$ et $2xy = -2$

En plus $|(x+iy)^2| = |-2i|$ et donc

$$x^2 + y^2 = 2$$

Nous cherchons les solutions (x,y) telles que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ 2xy = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ xy = -1 \end{cases}$$

Les racines carrées de $-2i$ sont donc $1-i$ et $-1+i$. Prenons $\delta = 1-i$, alors les solutions de l'équation du second degré sont :

$$z_1 = \frac{-(1-5i) + (1-i)}{2i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(1-5i) - (1-i)}{2i}$$

$$= 2$$

$$z_2 = \frac{-2+6i}{2i} = \frac{-1+3i}{i} = \frac{-i-3}{-1} = 3+i$$

(7) Soit M le point d'affixe $z = 2+2\sqrt{3}\,i$. Déterminer le nombre complexe obtenu après avoir effectué une rotation de 30° autour de l'origine sur M (dans le sens trigonométrique).

Solution : Une rotation autour de l'origine ne change pas le module. Écrivons $z = 2+2\sqrt{3}\,i$ sous forme exponentielle.

$$|z| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\text{Donc } z = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$

$$= 4\left(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3\right)$$

$$= 4\, e^{i\pi/3}.$$

Le nombre complexe obtenu est donc

$$4 \cdot e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/6} = 4e^{i\pi/2} = 4i$$

(8) Soit $B(-1,1)$ un point et $\vec{v}(1,0)$ un vecteur du plan cartésien.

(a) Donner une équation cartésienne de la droite L passant par B, ayant $\vec{v}$ comme vecteur directeur.

Solution : $L : 0(x+1) - 1(y-1) = 0$

$L : y-1=0$

(b) Donner une équation cartésienne de la droite L' passant par B et perpendiculaire à L.

Solution : $\vec{v}(1,0)$ est donc un vecteur normal à L' ;

$L' : 1(x+1) + 0\cdot(y-1) = 0$

$L' : x+1=0$

9) Déterminer les conditions sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que les droites $D : ax + 2y + 3 = 0$ et $D' : 5x + by + 6 = 0$ dans le plan soient

(a) parallèles disjointes

Solution : $\vec{v}_D(2, -a)$, $\vec{v}_{D'}(b, -5)$

D et D' sont parallèles ssi $\vec{v}_D$ et $\vec{v}_{D'}$ sont colinéaires ssi $\begin{vmatrix} 2 & -a \\ b & -5 \end{vmatrix} = 0$ ssi $ab = 10$

Si $ab = 10$, alors $D : ax + 2y + 3 = 0$

$D' : 5x + \frac{10}{a} y + 6 = 0$

ou $D' : 5ax + 10y + 6a = 0$

D et D' sont disjointes si $6a \neq 5.3$

$a \neq \frac{5}{2}$

D et D' sont donc parallèles disjointes si $ab = 10$ et $a \neq 5/2$

(b) confondues

Solution : de (a) il suit que D et D' sont confondues ssi $a = \frac{5}{2}$ et $b = 4$.

(c) perpendiculaires

Solution : $D \perp D'$ ssi $\vec{v}_D \cdot \vec{v}_{D'} = 0$

ssi $(2, -a) \cdot (b, -5) = 0$

ssi $2b + 5a = 0$

(10) Soit $t \in \mathbb{R}$. $D_1 : 2x + ay - 1 = 0$, $D_2 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \end{cases}$

Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ si les droites D_1 et D_2 dans le plan sont sécantes, parallèles disjointes, confondues ou perpendiculaires.

Solution : $\vec{v}_{D_1}(-a, 2)$ et $\vec{v}_{D_2}(-1, 1)$

* sécantes ssi $\vec{v}_{D_1}$ et $\vec{v}_{D_2}$ ne sont pas colinéaires

ssi $\begin{vmatrix} -a & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

ssi $-a + 2 \neq 0$

ssi $a \neq 2$

* parallèles disjointes :

$\vec{v}_{D_1}$ et $\vec{v}_{D_2}$ sont colinéaires ssi $a = 2$.

Dans ce cas $D_1 : 2x + 2y - 1 = 0$

$D_2 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \end{cases}$

$A(2, 0) \in D_2$ mais $A \notin D_1$ donc si $a = 2$ alors les droites D_1 et D_2 sont disjointes

* confondues :

jamais parce que pour $a \neq 2$ les droites sont sécantes

pour $a = 2$ les droites sont disjointes

* perpendiculaires :

D_1 et D_2 sont perpendiculaires ssi $\vec{v}_{D_1} \cdot \vec{v}_{D_2} = 0$

ssi $(-a, 2) \cdot (-1, 1) = 0$

ssi $a + 2 = 0$

ssi $a = -2$