Solutions du DS d'octobre 2011

Ex. 1 ① (a) $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$

$|1-i| = \sqrt{2}$

$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i7\pi/12}$$

(b) $$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i7\pi/12}\right)^6 = 8e^{i7\pi/2}$$

$$= 8e^{i3\pi/2}$$

$$= 8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -8i$$

② $z^2-(4+3i)z+1+5i=0$

$$\Delta = (-(4+3i))^2-4(1+5i) = (4+3i)^2-4-20i$$
$$= 16-9+24i-4-20i$$
$$= 3+4i$$

On cherche une $\delta = x+iy$, $x, y\in\mathbb{R}$, telle que $\delta^2 = 3+4i$

$$(x+iy)^2 = 3+4i \iff x^2-y^2+2ixy = 3+4i$$
$$\iff \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

En plus $|(x+iy)^2| = |3+4i|$ ou $|x+iy|^2 = |3+4i|$

ou $x^2+y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

Donc $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2=8 \\ 2y^2=2 \\ xy=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \\ xy=2 \end{cases}$

Les racines carrées de Δ sont donc $2+i$ et $-2-i$.

On pose $\delta = 2+i$.

Les solutions sont

$$z_1 = \frac{4+3i+2+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4+3i-2-i}{2}$$

$$= 3+2i \qquad\qquad = 1+i$$

③ Linéariser $\cos^2 x . \sin x$

$$\cos^2 x \sin x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 . \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2e^{ix}.e^{-ix}}{4}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$= \frac{\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+2\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{8i}$$

$$= \frac{e^{3ix}+e^{-ix}+2e^{ix}-e^{ix}-e^{-3ix}-2e^{-ix}}{8i}$$

$$= \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{8i} + \frac{e^{-ix}-e^{ix}}{8i} + 2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{8i}$$

$$= \frac{\sin 3x}{4} - \frac{\sin x}{4} + 2\frac{\sin x}{4}$$

$$= \frac{\sin 3x}{4} + \frac{\sin x}{4}$$

④ $|z-iz| = |z-1|$

On pose $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

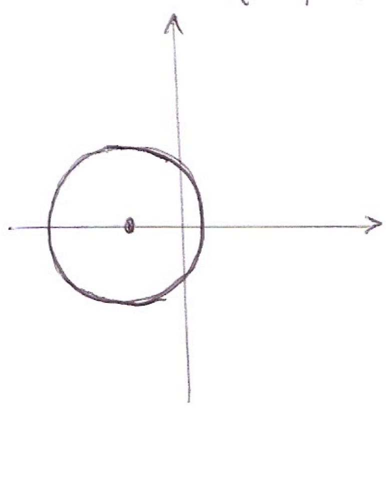
$|z-iz| = |a+bi-ia+b| = |a+b+i(b-a)|$
$= \sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}$

$|z-1| = |a+bi-1| = |a-1+bi| = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$

Donc $|z-iz|=|z-1|$ ssi

$$\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2} = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$(a+b)^2+(b-a)^2 = (a-1)^2+b^2$$
$$\Updownarrow$$
$$a^2+b^2+2ab+b^2+a^2-2ab = a^2-2a+1+b^2$$
$$\Updownarrow$$
$$a^2+b^2+2a = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$(a+1)^2+b^2 = 2$$
$$\Updownarrow$$

(a,b) appartient au cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.



Ex. 2 $\Delta_1 : x+y-2=0$, $\Delta_2 : x+5y+6=0$

① a) $A(1,1) \in \Delta_1$

$B(-1,-1) \in \Delta_2$

$\vec{v}_{\Delta_1}(-1,+1)$

$\vec{v}_{\Delta_2}(-5,1)$

$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$\Delta_2 : \begin{cases} x = -1-5t \\ y = -1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b) Comme $\vec{v}_{\Delta_1}$ et $\vec{v}_{\Delta_2}$ ne sont pas colinéaires, Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles.

Comme $\vec{v}_{\Delta_1} \cdot \vec{v}_{\Delta_2} \neq 0$, Δ_1 et Δ_2 ne sont pas perpendiculaires.

② a) $\vec{v}_{\Delta_1}$ est un vecteur normal à Δ_3 et $O(0,0) \in \Delta_3$:

$\Delta_3 : -(x-0)+(y-0)=0$

$-x+y=0$

b) $\{A\} := \Delta_1 \cap \Delta_2$:

$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x+5y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 2-y+5y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 4y+8=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

$A(4,-2)$

$\{B\} := \Delta_1 \cap \Delta_3$

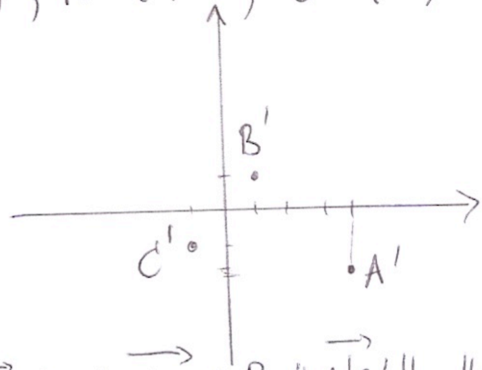
$\begin{cases} x+y-2=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(1,1)$

$\{C\} := \Delta_2 \cap \Delta_3$:

$$\begin{cases} x+5y+6=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 6y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow C(-1,-1)$$

③ $A'(4,-2)$, $B'(1,1)$, $C'(-1,-1)$

a)



b) $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{A'C'}\|$? $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{B'C'}\|$?

$\overrightarrow{A'B'} = (-3,3)$ $\quad \|\overrightarrow{A'B'}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{A'C'} = (-5,1)$ $\quad \|\overrightarrow{A'C'}\| = \sqrt{26}$

$\overrightarrow{B'C'} = (-2,-2)$ $\quad \|\overrightarrow{B'C'}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Le triangle $A'B'C'$ n'est donc pas isocèle et non plus équilatéral.

On calcule $\overrightarrow{B'C'} \cdot \overrightarrow{B'A'} = (-2;2) \cdot (3,-3) = 0$

et on conclut que le triangle $A'B'C'$ est rectangle.

c) l'aire du triangle $A'B'C' = \dfrac{|\det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})|}{2}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

d) Le milieu de $[A'B']$ est le point de coordonnées $\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

$\vec{v}_{A'B'}(-1,1)$ est un vecteur normal pour la médiatrice du segment $[A'B']$ et elle a donc comme équation :

$$-\left(x-\frac{5}{2}\right)+\left(y+\frac{1}{2}\right)=0 \quad \text{ou} \quad -x+y+3=0$$

Le milieu de $[B'C']$ est le point de cordonnées $(0,0)$.
$\vec{v}_{B'C'}$ est un vecteur normal pour la médiatrice de $[B'C']$ et donc elle a comme équation :

$$x + y = 0$$

e) Ω = le point d'intersection des 3 médiatrices,
donc $\{\Omega\} = \{x+y=0\} \cap \{-x+y+3=0\}$.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ 2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3/2 \\ y=-3/2 \end{cases}$$

$$\Omega\left(3/2, -3/2\right)$$

Le rayon du cercle circonscrit est $\|\vec{A'\Omega}\|$

$$= \left\|\left(\frac{-5}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\| = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$