Interrogation n° 2 MIMP M22 groupe 11

① $U_a = \langle (4+a, 2, 0, -2), (3, a-1, 0, -1) \rangle$

$V_a = \langle (3, 5, a+1, -5), (0, 10+a, 0, 0) \rangle$.

* On cherche $\dim(U_a)$.

$\dim U_a = 2$ sauf pour les valeurs $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles : $\exists k \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} 4+a = k.3 \\ 2 = k.(a-1) \\ 0 = k.0 \\ -2 = k.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+a = 6 \\ a = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{ a = 2$

Conclusion : si $a \neq 2$, alors $\dim U_a = 2$

si $a = 2$, alors $\dim U_a = 1$.

* On cherche $\dim(V_a)$.

Conclusion : si $a = -10$, alors $\dim V_a = 1$

si $a \neq -10$, alors $\dim V_a = 2$

* On cherche $\dim(U_a + V_a)$.

Si $a = 2$, alors $U_a + V_a = \langle (3,1,0,-1), (3,5,3,-5), (0,12,0,0) \rangle$

$\{(3,1,0,-1), (0,12,0,0)\}$ est une famille libre et comme $(3,5,3,-5)$ n'est pas une combinaison linéaire de $(3,1,0,-1)$ et $(0,12,0,0)$, on trouve que $\dim(U_a + V_a) = 3$.

Si $a=-10$, alors $U_a + V_a = \langle (-6,2,0,-2), (3,-11,0,-1),$
$(3,5,-9,-5) \rangle$

$\{(-6,2,0,-2), (3,-11,0,-1)\}$ est une famille libre et comme $(3,5,-9,-5)$ n'est pas une combinaison linéaire de $(-6,2,0,-2)$ et $(3,-11,0,-1)$, on trouve que $\dim(U_a + V_a) = 3$.

Si $a \neq 2$ et $a \neq -10$, alors

$$U_a + V_a = \langle (4+a,2,0,-2), (3,a-1,0,-1), (3,5,a+1,-5), (0,10+a,0,0) \rangle$$

On sait que $\{(4+a,2,0,-2), (3,a-1,0,-1)\}$ est une famille libre. On regarde si $(0,10+a,0,0)$ ou $(0,1,0,0)$ est une combinaison linéaire de $(4+a,2,0,-2)$ et $(3,a-1,0,-1)$:

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1(4+a) + \lambda_2 . 3 \\ 1 = \lambda_1 2 + \lambda_2(a-1) \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_1(-2) + \lambda_2(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ 0 = \lambda_1(4+a) - 6\lambda_1 \\ 1 = 2\lambda_1 - 2\lambda_1(a-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ 0 = \lambda_1(a-2) \\ 1 = \lambda_1(4-2a) \end{cases}$$

Ce système n'a jamais de solution, donc nous trouvons que pour tout $a \neq 2$ et $a \neq -10$, $\{(4+a,2,0,-2), (3,a-1,0,-1), (0,1,0,0)\}$ est libre.

Si en plus $a \neq -1$, alors $(3,5,a+1,-5)$ n'est pas une combinaison linéaire de $(4+a,2,0,-2)$, $(3,a-1,0,-1)$, $(0,1,0,0)$ et donc $\dim(U_a+V_a)=4$.

Si $a=-1$, alors $(3,5,0,-5)$ est une combinaison linéaire de $(3,2,0,-2)$, $(3,-2,0,-1)$, $(0,1,0,0)$ et donc $\dim(U_a+V_a)=3$.

* On cherche $\dim(U_a \cap V_a)$.

$$\dim(U_a \cap V_a) = \dim U_a + \dim V_a - \dim(U_a+V_a)$$

Conclusion :

Si $a=2$, $\dim(U_a \cap V_a) = 1+2-3 = 0$

Si $a=-10$, $\dim(U_a \cap V_a) = 2+1-3 = 0$

Si $a=-1$, $\dim(U_a \cap V_a) = 2+2-3 = 1$

Si $a \neq 2$, $a \neq -10$, $a \neq -1$, $\dim(U_a \cap V_a) = 2+2-4 = 0$.

② $U = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) / M . \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$.

(a) On cherche une base de U.

$$U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \begin{pmatrix} 6a+2b & -9a-3b \\ 6c+2d & -9c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \middle| 3a+b=0 \text{ et } 3c+d=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & -3a \\ c & -3c \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Une base de U est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

(b) Soit $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. On démontre que $U \oplus V = M_2(\mathbb{R})$.

Comme $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, il suffit de démontrer que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3\lambda_2 = 0 \;!! \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 \cancel{} = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{La famille est libre.}$$