TD numero 2

Exercice 1. *Paradoxe des anniversaires*

a) Quelle est la probabilité pour que parmi N personnes, au moins 2 aient la même date d'anniversaire ? (On négligera l'existence du 29 février et on denotera une date avec un element $d \in \{1, \cdots, 365\}$)

b) Pour quelle valeur de N cette probabilité est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 2. *On tire deux cartes d'un jeu de 32.*

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ?

b) Si l'on n'a pas obtenu une paire, on a le choix entre jeter l'une des deux cartes tirées et en retirer une parmi les 30 restantes, ou jeter les deux cartes tirées et en retirer deux parmi les 30 restantes. Quelle stratégie donne la plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin ?

Exercice 3. *On considère un jeu de pile ou face équilibré n fois.*

a) Calculer la probabilité que le premier temps auquel on obtient pile soit le temps n.

b) Soit $k \geq 1$, un entier. Calculer la probabilité que le k-ième temps auquel on obtient pile soit le temps n.

Exercice 4. *On lance un dé tétraédral dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et un dé octaédral dont les faces sont numérotées de 1 à 8.*

a) Calculer la loi de la somme S.

b) Du produit P.

c) Du plus grand M des deux nombres obtenus.

Exercice 5. *Soient X, Y, Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X et Y ont même loi. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.*

a) Est-il vrai que $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi ?

b) Est-il vrai que $X + Z$ et $Y + Z$ ont même loi ?

Exercice 6. *Soit X une variable aléatoire discrète telle que X^2 est intégrable. Rappelons que l'on a $E(|X|) < \infty$ dans ce cas.*

a) Montrer que pour tout réel $a \in \mathbb{R}, E((X-a)^2) < \infty$.

b) Montrer que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $Var(X-a) = Var(X)$.

c) Posons $m := E(X)$, et $f(a) := E((X-a)^2)$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(a) \geq f(m)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'inégalité étant une égalité si et seulement si $a = m$.