

Feuille de TD n°1 : Estimation et Intervalle de confiance

Exercice n°1 :

1. Soit X une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, calculer :
 - (a) les probabilités suivantes :
 - $P(X \geq 0.5)$
 - $P(0.23 \leq X \leq 1.37)$
 - $P(-0.42 \leq X \leq 0.42)$
 - (b) les seuils t suivants :
 - $P(X \leq t) = 0.95$
 - $P(X \geq t) = 0.95$
 - $P(-t \leq X \leq t) = 0.95$
2. Soit X une loi normale $\mathcal{N}(2, 4)$, 4 étant le paramètre de variance, calculer :
 - (a) les probabilités suivantes :
 - $P(X \geq 2.5)$
 - $P(2.4 \leq X \leq 2.7)$
 - $P(1.7 \leq X \leq 2.3)$
 - (b) les seuils t suivants :
 - $P(X \leq t) = 0.95$
 - $P(X \geq t) = 0.95$
 - $P(-t \leq X \leq t) = 0.95$
3. Soit T une loi de Student de paramètre 4, calculer :
 - (a) les probabilités suivantes :
 - $P(X \geq 0.941)$
 - $P(-1.533 \leq X \leq 1.533)$
 - (b) les seuils t suivants :
 - $P(X \leq t) = 0.9$
 - $P(X \geq t) = 0.9$
 - $P(-t \leq X \leq t) = 0.9$

Exercice n°2 :

Chaque semaine, le Monoprix de A. sélectionne 100 clients pour estimer le montant moyen des dépenses de chaque client. En se fondant sur les nombreuses enquêtes précédentes, Monoprix suppose que la dépense de chaque client suit approximativement une loi normale, d'écart-type 10 euros.

Cette semaine, la moyenne d'échantillon observée par le Monoprix A. est de 45 euros. On note m le montant moyen dépensé par les clients de cette semaine.

1. Construire un intervalle de confiance pour m au seuil 95%.
2. Construire un intervalle de confiance pour m au seuil 99%.

Exercice n°3 :

L'écart-type d'une population est supposé connu égal à 15.

1. La moyenne d'un échantillon aléatoire de 60 observations est égale à 80. Construire un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne de la population.
2. On effectue 60 observations supplémentaires. La moyenne de l'échantillon aléatoire des 120 observations est toujours de 80. Construire un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne de la population.
3. Combien d'observations doit-on effectuer pour obtenir une marge d'erreur de 1 au seuil de confiance de 95%?

Exercice n°4 :

Un échantillon tiré d'une population suivant une loi normale fournit les observations suivantes :

120, 141, 93, 105, 76, 132, 109, 117

1. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne de la population.
2. Donner une estimation ponctuelle de l'écart-type de la population.
3. Donner un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne de la population.

Exercice n°5 :

1. Un échantillon de 11 observations fournit une moyenne de l'échantillon de 42, et un écart-type d'échantillon de 9. On souhaite construire un intervalle de confiance pour la moyenne de la population au seuil de confiance de 90%. Quelle hypothèse doit-on faire sur la population? Construire l'intervalle de confiance.
2. L'échantillon contient maintenant 85 observation; la moyenne de l'échantillon de 44, et l'écart-type d'échantillon de 9.5. On souhaite construire un intervalle de confiance pour la moyenne comme à la question précédente. A-t'on besoin de faire la même hypothèse? Pourquoi? Construire l'intervalle de confiance.

Exercice n°6 :

Une enquête de la Poste indique que l'envoi personnalisé d'un courrier publicitaire à un client potentiel entraîne une visite en magasin de ce client dans 46% des cas.

Supposons que ce résultat vienne d'une enquête sur 50 courriers envoyés. Construire un intervalle de confiance à 90% pour la proportion des destinataires du courrier se rendant en magasin.

Exercice n°7 :

Deux candidats A et B sont en lice pour la prochaine élection. Un sondage donne A gagnant avec 55% des voix contre 45% à son adversaire.

1. On suppose que 250 personnes ont été sondées. Construire un intervalle de confiance pour la proportion de votants en faveur de A en utilisant un seuil de 95%.
2. Même question si on suppose maintenant que 1000 personnes ont été sondées.

Exercice n°8 :

On souhaite faire une enquête sur le salaire annuel moyen à la sortie d'une école d'ingénieur. Avant de commencer l'enquête, on se pose les questions suivantes : avec quelle précision souhaite-t'on connaître le salaire moyen? Quelle taille d'échantillon choisir? On estime grossièrement l'écart-type de l'échantillon à environ 3500 euros.

1. Utilisez cet ordre de grandeur pour estimer la taille de l'échantillon si on souhaite une marge d'erreur de 500 euros, au seuil de confiance 95%.
2. De même, estimer la taille de l'échantillon si on souhaite une marge d'erreur de 100 euros.
3. Recommanderiez-vous d'utiliser plutôt une marge d'erreur de 100 euros ou 500 euros ?