Correction TD n°1

Exercice n°1

1) $X \sim \mathcal{N}(0;1)$

a)

- $P(X \geq 0.5) = 1 - P(X < 0.5)$
$= 1 - P(X \leq 0.5)$ car loi continue

On lit $P(X \leq 0.5)$ dans la table associée à la loi $\mathcal{N}(0;1)$ en étant sur la ligne 0.5 et la colonne 0.00.

On lit $P(X \leq 0.5) = 0,6915$
d'où $P(X \geq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$

- $P(0.23 \leq X \leq 1.37) = P(X \leq 1.37) - P(X < 0.23)$
$= P(X \leq 1.37) - P(X \leq 0.23)$

On lit les deux probabilités dans la table comme précédemment.

$P(X \leq 1.37) = 0.9147$ car $1.37 = 1.3 + 0.07$
$P(X \leq 0.23) = 0.5910$ car $0.23 = 0.2 + 0.03$

d'où $P(0.23 \leq X \leq 1.37) = 0.3237$

- $P(-0.42 \leq X \leq 0.42) = P(X \leq 0.42) - P(X < -0.42)$
$= P(X \leq 0.42) - P(X > 0.42)$

car avec une loi $\mathcal{N}(0;1)$ on a $P(X \leq -t) = P(X \geq t)$
soit $P(-0.42 \leq X \leq 0.42) = P(X \leq 0.42) - (1 - P(X \leq 0.42))$

d'où $P(-0.42 \leq X \leq 0.42) = 2P(X \leq 0.42) - 1$

on lit dans la table $P(X \leq 0.42) = 0.6628$
car $0.42 = 0.4 + 0.02$

donc $P(-0.42 \leq X \leq 0.42) = 0.3256$

b)
- $P(X \leq t) = 0.95$
on cherche dans le corps de la table 0.95
on trouve 0.9495 et 0.9505
le seuil associé à 0.9495 est 1.64
le seuil associé à 0.9505 est 1.65

puisque $0.95 = \frac{1}{2}(0.9495 + 0.9505)$

on prend $t = \frac{1}{2}(1.64 + 1.65) = 1.645$

- $P(X \geq t) = 0.95$ puisque $0.95 \geq 0.5$
cela implique que $t \leq 0$
or dans la table il n'y a que des seuils positifs. Donc on va lire $-t$.
Il faut donc exprimer $P(X \geq t)$ avec $-t$

$P(X \geq t) = P(X \leq -t)$

d'après ce qui précède $-t = 1.645$
soit $t = -1.645$

- $P(-t \leq X \leq t) = P(X \leq t) - P(X \leq -t)$
$= P(X \leq t) - P(X > t)$
$= P(X \leq t) - (1 - P(X \leq t))$
$= 2P(X \leq t) - 1$

donc on cherche t tel que $2P(X \leq t) - 1 = 0.95$
soit $P(X \leq t) = \frac{1}{2}(1 + 0.95) = 0.975$

On cherche 0.975 dans le corps de la table.
On lit $t = 1.96$

2) $X \sim \mathcal{N}(2\,;4)$
Pour lire des probabilités ou des seuils, il faut se ramener à la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$
Or si $X \sim \mathcal{N}(2\,;4)$ alors $Y = \frac{X-2}{\sqrt{4}} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$

a)
- $P(X \geq 2.5) = P(Y \geq 0.25)$
$= 1 - P(Y < 0.25)$

or ~~P(X<0~~ $P(Y < 0.25) = 0.5987$

d'où $P(X \geq 2.5) = 0.4013$

- ~~P(0~~ $P(2.4 \leq X \leq 2.7) = P(0.2 \leq Y \leq 0.35)$
$= P(Y \leq 0.35) - P(Y < 0.2)$
$= 0.6368 - 0.5793$
$= 0.0575$

- $P(1.7 \leq X \leq 2.3) = P(-0.15 \leq Y \leq 0.15)$
$= P(Y \leq 0.15) - P(Y < -0.15)$
$= P(Y \leq 0.15) - P(Y > 0.15)$
$= P(Y \leq 0.15) - (1 - P(Y \leq 0.15))$
$= 2P(Y \leq 0.15) - 1$
$= 2 \times 0.5596 - 1$
$= 0.1192$

b)

- $P(X \leq t) = 0.95 \Leftrightarrow P(Y \leq \frac{t-2}{2}) = 0.95$

d'après l'exercice précédent, on a $\frac{t-2}{2} = 1.645$

soit $t = 5.29$

- $P(X \geq t) = 0.95 \Leftrightarrow P(Y \geq \frac{t-2}{2}) = 0.95$

d'après l'exercice précédent, on a $\frac{t-2}{2} = -1.645$

soit $t = -1.29$

- $P(-t \leq X \leq t) = 0.95$

$\Leftrightarrow P(\frac{-t-2}{2} \leq Y \leq \frac{t-2}{2}) = 0.95$

$\Leftrightarrow P(Y \leq \frac{t-2}{2}) - P(Y < -\frac{t+2}{2}) = 0.95$

$\Leftrightarrow P(Y \leq \frac{t-2}{2}) - P(Y > \frac{t+2}{2}) = 0.95$

$= P(Y \leq \frac{t-2}{2}) + P(Y < \frac{t+2}{2}) = 1.95$

Après recherche dans la table, on lit :

$$\frac{t-2}{2} = 1.65 \quad \text{car alors} \quad \frac{t+2}{2} = 3.65$$

soit $t = 5.3$

3. $X \sim T(4)$

Donc on va se placer sur la ligne associée à 4 dans la table de Student.

a)

- $P(X \geq 0.941) = ?$

on cherche la valeur 0.941 dans la ligne associée à 4.
On voit qu'il lui correspond $P = 0.4$

mais $P = P(X \geq 0.941) + P(X \leq -0.941)$

comme $P(X \geq 0.941) = P(X \leq -0.941)$
on en déduit que :

$$P(X \geq 0.941) = \frac{P}{2} = 0.2$$

- $P(-1.533 \leq X \leq 1.533) = 1 - P(X > 1.533) - P(X < -1.533)$

$= 1 - (P(X > 1.533) + P(X < -1.533))$

or $P(X > 1.533) + P(X < -1.533) = P$
avec P la valeur associée au seuil 1.533 lu sur la ligne associée à 4

ainsi $P(X > 1.533) + P(X < -1.533) = 0.2$

d'où $P(-1.533 \leq X \leq 1.533) = 1 - 0.2 = 0.8$

b)

. $P(X \leq t) = 0.9$

cela signifie que $P(X \geq t) = 0.1$

puisque $0.1 < 0.5$ cela signifie que $t \geq 0$.

$P(X \geq t)$ correspond à la probabilité simplement de la partie droite en gris sur le dessin associé à la loi de Student.
donc on doit trouver P tq $\frac{P}{2} = 0.1$

d'où $P = 0.2$
il suffit maintenant de lire t à l'intersection de $P = 0.2$ et de la ligne 4.

$t = 1.533$

. $P(X \geq t) = 0.9 \iff P(X \leq t) = 0.1$

puisque $0.1 < 0.5$ on a dans cette écriture $t < 0$.
donc dans la table, on va lire $-t$
$P(X \leq t)$ est donc l'aire en gris sur la gauche du dessin
et donc $P(X \leq t) = \frac{P}{2}$ avec donc $P = 0.2$

$-t$ est donc la valeur à l'intersection de la ligne 4 et de la colonne $P = 0.2$

$\Rightarrow \quad -t = 1.533$ soit $t = -1.533$

. $P(-t \leq X \leq t) = 0.9$
cela équivaut à $P(X \leq -t) + P(X \geq t) = 0.1$

on lit donc t comme la valeur à l'intersection de $P = 0.1$ et de la ligne 4.

ainsi $t = 2.132$.

Exercice n° 2

Soit X la variable aléatoire égale à la dépense d'un client.
D'après le texte, on a $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2 = 100)$.

On veut donc construire l'interval de confiance de m.
On est dans le cadre où la variance est connue et la loi est une loi normale.

1) on a un niveau de confiance de 95%.
donc $\alpha = 5\% = 0.05$

D'après le cours, on sait que :
l'intervalle de confiance a pour expression

$$\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \; ; \; \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \right]$$

où $\overline{X}_n$ est la moyenne d'échantillon
σ est l'écart-type
n le nombre de clients considérés
$z_{1-\alpha/2}$ le fractile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ d'une loi $\mathcal{N}(0;1)$

ainsi par lecture de table $z_{1-\alpha/2} = 1.96$

d'où ici l'intervalle de confiance est :

$$\left[45 - \frac{10}{\sqrt{100}} \times 1.96 \; ; \; 45 + \frac{10}{\sqrt{100}} \times 1.96 \right]$$

$$\left[45 - 1.96 \; ; \; 45 + 1.96 \right]$$

$$\left[43.04 \; ; \; 46.96 \right]$$

2) pour le niveau de confiance 99%, on a
$\alpha = 1\% = 0.01$.

Alors $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.575$

et on remplace comme précédemment
on obtient

$$\left[42.425 \; ; \; 47.575 \right]$$

Remarque : plus α est petit et plus l'intervalle de confiance est grand en terme d'amplitude.

Exercice n° 3

1) On est dans le cadre où l'on connait la variance qui vaut $\sigma^2 = 15^2$.
Par contre on ne connait pas la loi.

D'après le cours, on a vu que grâce au théorème central limit, on s'en sort et que l'expression de l'intervalle de confiance est :

$$\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \; ; \; \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \right]$$

avec les mêmes notations que précédemment.

ici on obtient concrètement

$$\left[80 - \frac{15}{\sqrt{180}} \times 1.96 \; ; \; 80 + \frac{15}{\sqrt{180}} \times 1.96 \right]$$

soit $[\, 76.80 \; ; \; 83.20 \,]$

Rq : il faut que la borne inférieure de votre intervalle soit une valeur par défaut de la bonne valeur (soit plus petite que la vraie valeur) alors que la borne supérieure doit être une valeur par excès c'est à dire plus grande quand vous devez faire des approximations.

2) On utilise la même expression mais avec $n = 120$ au lieu de $n = 60$.

$[77.31 ; 82.69]$

Rq : quand on augmente n sans rien changer d'autre, l'amplitude de l'intervalle diminue.

3) La marge d'erreur de l'intervalle de confiance pour n observations est : $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$

avec $z_{1-\alpha/2} = 1.96$ car on connait ~~sigma~~ l'écart-type et $\alpha = 5\%$

on cherche donc n tq

$$\frac{15}{\sqrt{n}} \times 1.96 \leq 1$$

soit $\sqrt{n} \geq 15 \times 1.96$

soit $n \geq (15 \times 1.96)^2$

soit $n \geq 864.36$

Il faut donc au minimum 865 observations.

Exercice n° 4

1) Un estimateur ponctuel de la moyenne de la population est $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.

Ici, on a $n = 8$.

Une estimation est ici $\overline{x}_n = \frac{1}{8}(120 + 141 + 93 + 105 + 76 + 132 + 109 + 117)$

$= 111.625$

2) Un estimateur de l'écart-type est :

$$\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \overline{x}_n)^2 + (x_2 - \overline{x}_n)^2 + \dots + (x_8 - \overline{x}_n)^2\right]}$$

$\hat{\sigma}_n = 20.8528$

3) On a supposé que l'on avait une loi normale. Par contre on ne connait pas l'écart-type que l'on doit estimer.

La formule de l'intervalle de confiance pour la moyenne de la population est donc :

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} \ ; \ \overline{X}_n + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}\right]$$

avec $t_{1-\alpha/2}$ le fractile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$

d'une loi de Student à $(n-1)$ degré de liberté.

$$\left[111.625 - \frac{20.8528}{\sqrt{8}} \times 1.895 \ ; \ 111.625 + \frac{20.8528}{\sqrt{8}} 1.895 \right]$$

soit $[\, 97.65 \ ; \ 125.596 \,]$

Exercice n° 5

1) On est dans le cadre où $n = 11$ et où l'on ne connait pas l'écart-type, car on ne dispose que de l'écart-type de l'échantillon et non celui de la population.

Si on connait ~~la loi~~ le fait que l'on travaille avec une loi normale, alors on pourra répondre à la question car alors on pourra utiliser le fait que :

$$\sqrt{n} \, \frac{\overline{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}_n} \sim T(n-1)$$

avec μ : la moyenne de la population

$\hat{\sigma}_n$: l'écart-type de l'échantillon

dans ce cas :

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} \ ; \ \overline{X}_n + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} \right]$$

avec ici $n = 11$ $\quad \bar{x}_n = 42$

$\hat{\sigma}_n = 9$ $\quad t_{1-\alpha/2} = 2.228$ (ligne 10 dans la table de student $P = 5\%$)

$\alpha = 10\%$

soit $[35.95 ; 48.05]$

Si on ne connait pas le fait que la loi est normale, on ne sait pas répondre car pas assez d'observations.

2) Ici $n = 85 > 30$

Comme le nombre d'observations est grand, on n'a plus besoin de savoir que l'on est en présence d'une loi normale, car on peut, comme on l'a vu dans le cours, combiner le Théorème Central Limit et le lemme de Slutsky.

La formule pour l'intervalle de confiance est alors :

$$\left[\bar{X}_n - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} ; \bar{X}_n + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \right]$$

$z_{1-\alpha/2}$: le fractile d'ordre $(1-\alpha/2)$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

on lit puisque $\alpha = 10\%$ $z_{1-\alpha/2} = 1.645$

on obtient :

$$\left[44 - \frac{9.5}{\sqrt{85}} \times 1.645 ; 44 + \frac{9.5}{\sqrt{85}} \times 1.645 \right]$$

soit $[42.30 ; 45.70]$