Exercice n°1 :

a)

On a $\Omega = \{(d_1, .., d_N) \text{ avec } d_i \in \{1, .., 365\}\}$

ainsi $card(\Omega) = 365^N$

De ce fait si l'on considère l'événement A :

A = " deux personnes au moins ont la même date d'anniversaire "

on a :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{365^N}$$

Pour calculer P(A), on va considérer A^c car :

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

et A^c : " les N personnes sont nés à des jours différents ".

d'où :

$$Card(A^c) = A_{365}^N = \frac{365!}{(365-N)!}$$

donc :

$$P(A^c) = \frac{365 \times 364 \times .. \times (365 - (N-1))}{365 \times 365 \times ... \times 365}$$

$$= \prod_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$$

donc $P(A) = 1 - \prod_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$

b)

Posons $U_N = \prod_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$

: $N \geq 1$, on a :

$$\frac{U_{N+1}}{U_N} = 1 - \frac{N}{365}$$

donc si $1 \leq N \leq 365$, on a $0 \leq \frac{U_{N+1}}{U_N} \leq 1$

ainsi (U_N) est une suite décroissante et nulle à partir de $N = 366$

donc $P(A)$ est une fonction croissante de N qui est constante égale à 1 à partir de $N = 366$.

Ainsi, il existe $N \in [\![1, 365]\!]$ tq $\forall n \geq N$, $U_N \geq \frac{1}{2}$.

On fait une recherche numérique.

On trouve : $N = 23$ comme première valeur !

Exercice n° 2

a) Dans un jeu de 32 cartes, il y a :

- 8 hauteurs différents
- 4 cartes différents par hauteur

On considère l'événement A :

" A " = " tirer une paire quand on tire deux cartes d'un jeu de 32 cartes ".

On a : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

avec $\Omega = \{ \{a_1, a_2\},\ a_1 \neq a_2$ et a_1, a_2 cartes du jeu de 32 cartes $\}$

on a : $\text{card}(\Omega) = C_{32}^{2} = \binom{32}{2} = \dfrac{32!}{2!(30-2)!} = \dfrac{32 \times 31}{2}$

$= 496$

et $\text{card}(A) = \underset{\substack{\text{choix du} \\ \text{niveau possible} \\ \text{de la paire}}}{8} \times \underset{\substack{\text{choix de 2} \\ \text{cartes dans} \\ \text{le niveau} \\ \text{choisi}}}{C_4^2}$

$= 8 \times \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = 8 \times \dfrac{4 \times 3}{2} = 48$

d'où $P(A) = \dfrac{8 \times 2 \times 3}{16 \times 31} = \dfrac{3}{31} \simeq 0{,}097$

b) <u>Stratégie 1</u> : on ne jette qu'une carte

<u>Stratégie 2</u> : on jette les deux cartes

<u>Stratégie 1</u> :

$P(A) = \frac{3}{30} = 0.1$ car cette fois-ci comme une carte a un niveau fixé, il ne reste plus que 3 possibilités de carte pour avoir une paire sur les 30 cartes possibles.

<u>Stratégie 2</u> :

$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega_2}$ avec $\text{card } \Omega_2 = C_{30}^{2} = \frac{30 \times 29}{2} = 15 \times 29$

et $\text{card } A = \underbrace{6 \times \binom{4}{2}}_{\text{paire parmi les 6 niveaux non vus}} + \underbrace{2 \times \binom{3}{2}}_{\text{paire parmi les 2 niveaux déjà vus}}$

soit $P(A) = \frac{6 \times 6 + 2 \times 3}{15 \times 29} = \frac{42}{15 \times 29} = \frac{14}{5 \times 29}$

$= \frac{14}{145} < 0.1$

Donc la Stratégie 1 donne une plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin.

Exercice n° 3

a) On a $\Omega = \{ (t_1, \dots, t_n)$ avec $t_i \in \{P, F\} \}$

ainsi $\mathrm{Card}\, \Omega = 2^n$

$A =$ " le premier Pile arrive au temps n "

ainsi $A = (F, \dots, F, P)$

d'où $\mathrm{card}\, A = 1$

donc $P(A) = \frac{1}{2^n}$

b) $B_k =$ " le k^o temps où l'on obtient pile est n ".

ainsi $B_k = \{ (t_1, \dots, t_{n-1}, P)$ avec $t_i \in \{P, F\}$
et n^b de t_i tq $P = k-1 \}$

ainsi $\mathrm{Card}\, B_k = \binom{n-1}{k-1}$ car on a $k-1$ pile sur
les $n-1$ premières positions

d'où $P(B_k) = \binom{n-1}{k-1} \times \frac{1}{2^n}$

c) et si le dé n'était pas équilibré mais que $P(\text{Pile}) = p$

alors $P(A) = (1-p)^{n-1}\, p$

$P(B_k) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$

Exercice n°4 :

a)

Soit $\Omega = \{1;2;3;4\} \times \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$

ainsi : $Card(\Omega) = 32$

soit A un événement de Ω, on a :

$$P(A) = \frac{Card\ A}{32}$$

Soit S : la somme des deux dés :

on a $S(\Omega) = \{2;3;\dots;12\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12

ainsi : $P(S=2) = 1/32 = P(S=12)$

$P(S=3) = P(S=11) = 1/16$

$P(S=4) = P(S=10) = 3/32$

$P(S=4) = P(S=5) = P(S=6) = P(S=7) = P(S=8) = P(S=9) = 1/8$

b) Soit P : le produit des deux dés

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9	12	15	18	21	24
4	4	8	12	16	20	24	28	32

$P(P=1) = P(P=5) = P(P=7)$

$= P(P=9) = P(P=10) = P(P=14)$

$= P(P=15) = P(P=18) = P(P=20)$

$= P(P=21) = P(P=28) = P(P=32)$

$= 1/32$

$P(P=2) = P(P=3) = P(P=16) = P(P=24) = 1/16$

$P(P=4) = P(P=6) = P(P=8) = P(P=12) = 3/32$

c)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	2	3	4	5	6	7	8
3	3	3	3	4	5	6	7	8
4	4	4	4	4	5	6	7	8

$P(M=1) = 1/32$ $\qquad$ $P(M=3) = 5/32$

$P(M=2) = 3/32$ $\qquad$ $P(M=4) = 7/32$

$P(M=5) = P(M=6) = P(M=7) = P(M=8) = 4/32 = \frac{1}{8}$

Exercice n° 5

a) Soient $f(X)$ et $f(Y)$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{f(X) = n\}) = P(\{f(Y) = n\})$$

on a $\{f(X) = n\} = \{\omega \in \Omega \text{ tq } f(X(\omega)) = n\}$

$= \{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in f^{-1}(n)\}$

$= \{X \in f^{-1}(n)\}$

de même, on a $\{f(Y) = n\} = \{Y \in f^{-1}(n)\}$

or X et Y ont même loi donc :

$$P(\{Y \in f^{-1}(n)\}) = P(\{X \in f^{-1}(n)\})$$

soit $P(\{f(X) = n\}) = P\{f(Y) = n\})$

donc $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.

b)

Soit les variables aléatoires suivantes :

. on a deux boules une bleue et une rouge.

On définit :

$X(\text{bleu}) = 1$ $\quad Y(\text{bleu}) = 0$ $\quad Z(\text{bleu}) = 1$

$X(\text{rouge}) = 0$ $\quad Y(\text{rouge}) = 1$ $\quad Z(\text{rouge}) = 2$

On a : $P(X = 1) = 1/2$ $\quad P(Y = 1) = 1/2$

$P(X = 0) = 1/2$ $\quad P(Y = 0) = 1/2$

donc X et Y sont de même loi.

mais : $(X + Z)(\text{bleu}) = 1 + 1 = 2$

$(X+Z)(\text{rouge}) = 0 + 2 = 2$

donc $X+Z$ est la variable aléatoire constante égale à 2

et $(Y+Z)(\text{bleu}) = 0 + 1 = 1$

$(Y+Z)(\text{rouge}) = 1 + 2 = 3$

donc $(Y+Z)$ et $(X+Z)$ ne sont pas de même loi.