Année universitaire 2020-2021
Licence 2 — U.E. Electromagnétisme 1

Electromagnétisme 1

—TD—

TD n° 1. Électrocinétique 1

Exercice I. Résistance d'un fil et conductivité - préparation TP

On s'intéresse tout d'abord à la résistance de fils conducteurs. On peut montrer que la résistance R d'un fil dépend de la conductivité γ du matériau qui la constitue, de sa section S et de sa longueur ℓ : $R = \ell/(\gamma S)$.

1. Un fil de longueur 1 m a-t-il une résistance plus élevée ou plus basse qu'un fil de longueur 2 m ?

   Un fil de rayon 2 mm a-t-il une résistance plus élevée ou plus basse qu'un fil de rayon 1mm ?
2. Supposons un câble de cuivre de rayon 300 μm et de longueur 1 m ($\gamma_{Cu} = 5,8 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$). d'après cette formule, quelle est sa résistance ? La résistance des câble peut-elle être négligée par rapport aux résistances de 10 à 1000 Ω qui seront utilisées en TP ?

Exercice II. Résistance équivalente d'un ensemble de résistances — préparation TP

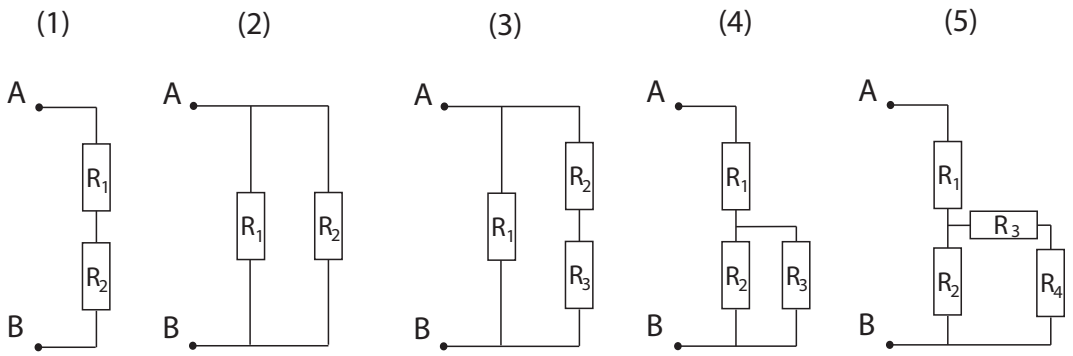


Figure 1. – Cinq situations de résistances en série et/ou en parallèle.

Dans chacun des cas, exprimer la résistance équivalente R_q entre les points A et B.

Cas (3) :

$$R_{eq,tot} = \frac{1}{1/R_1 + 1/(R_2 + R_3)} \tag{1'}$$

Cas (4) :

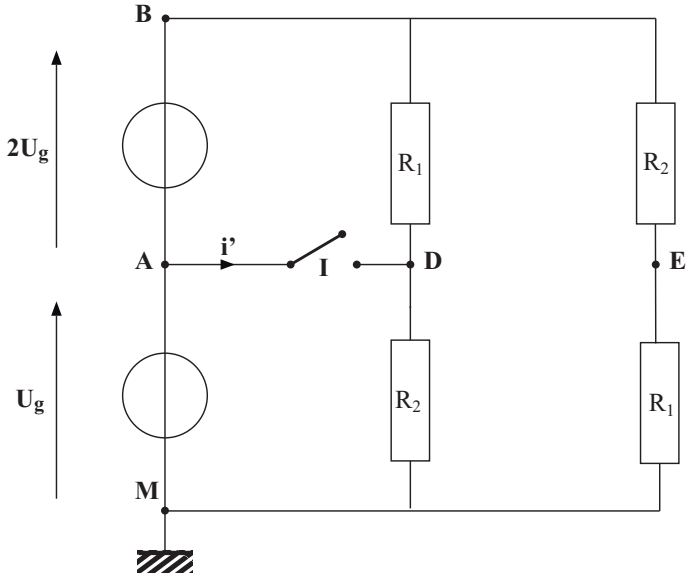
$$R_{eq,tot} = R_1 + \frac{1}{1/R_2 + 1/R_3} \tag{2'}$$

Le cas (5) est R_1 en série avec le cas (3) ou bien le cas (4) où R_3 devient $R_3 + R_4$:

$$R_{eq,tot} = R_1 + \frac{1}{1/R_2 + 1/(R_3 + R_4)} \tag{3'}$$

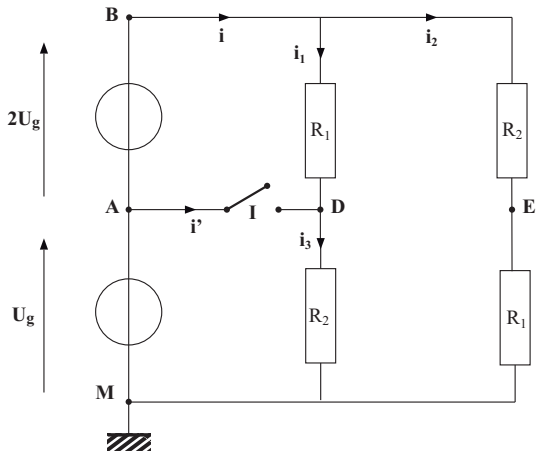
Exercice III. Étude de circuits en régime continu

On utilise deux générateurs de tension U_g et $2U_g$ pour alimenter un circuit composé de plusieurs résistances suivant le schéma ci-dessous. Au départ, l'interrupteur I est ouvert et donc le courant i' est nul.



1. Repérer les inconnues du problème (3 inconnues courant, 4 inconnues tension).

Il y a trois inconnues "intensité" : i, i_1 ,i_2 et quatre inconnues "tension" : U_{DM}, U_{EM}, U_{BD} et U_{BE}.



2. Écrire la loi des mailles, la loi des nœuds et la loi d'Ohm pour obtenir les équations liant ces différentes inconnues et exprimer les intensités des différents courants en fonction de U_g, R_1 et R_2.

Loi des mailles (2) :
$3U_g = U_{BD} + U_{DM}$ $\quad$ $3U_g = U_{BE} + U_{EM}$
Loi des nœuds (1) :
$i = i_1 + i_2$
Loi d'Ohm :
$U_{BD} = R_1 i_1$ $\quad$ $U_{DM} = R_2 i_1$ $\quad$ $U_{BE} = R_2 i_2$ $\quad$ $U_{EM} = R_1 i_2$
On obtient :
$3U_g = R_1 i_1 + R_2 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{3U_g}{R_1+R_2}$ $\quad$ $3U_g = R_2 i_2 + R_1 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{3U_g}{R_1+R_2}$ $\quad$ $i = \frac{6U_g}{R_1+R_2}$

3. Déterminer les tensions U_{DM} et U_{EM}

$U_{DM} = \frac{3U_g\, R_2}{R_1+R_2}$ $\quad U_{EM} = \frac{3U_g\, R_1}{R_1+R_2}$

4. On ferme maintenant l'interrupteur I reliant ainsi les points A et D et permettant le passage d'un courant d'intensité i' dans la branche AD.

   a. A part i', apparait-il de nouvelles inconnues ?

   Oui, i_3, et le courant traversant le générateur.

   b. Réécrire les lois des mailles, des nœuds et d'Ohm dans cette nouvelle configuration et en déduire les nouvelles valeurs des intensités

   Loi des mailles (3) :
   $U_g = U_{DM}$ $\quad 2U_g = U_{BD}$ $\quad 3U_g = U_{BE} + U_{EM}$
   Loi des nœuds (2) :
   $i = i_1 + i_2$ $\quad i_1 + i' = i_3$
   Loi d'Ohm :
   $U_{BD} = R_1 i_1$ $\quad U_{DM} = R_2 i_3$ $\quad U_{BE} = R_2 i_2$ $\quad U_{EM} = R_1 i_2$
   On obtient :
   $i_1 = \frac{2U_g}{R_1}$ $\quad i_2 = \frac{3U_g}{R_1+R_2}$ $\quad i_3 = \frac{U_g}{R_2}$ $\quad i' = i_3 - i_1$ $\quad i = i_1 + i_2$

   c. Exprimer la valeur de i' en fonction de U_g, R_1 et R_2.

   $i' = \frac{U_g}{R_2} - \frac{2U_g}{R_1} = \frac{R_1U_g - 2R_2U_g}{R_1R_2} = U_g\,\frac{R_1-2R_2}{R_1R_2}$

   d. Quelle doit être la valeur de R_1 pour qu'il ne circule aucun courant dans la branche AD du circuit ?

   $R_1 = 2\,R_2$

   e. Application numérique : $U_g = 12$ V et $R_2 = 100\ \Omega$.

   $R_1 = 200\ \Omega$ $\quad i_1 = i_2 = 120$ mA $\quad$ i = 240 mA

TD n° 2. Électrocinétique 2

Exercice I. Études de circuits en régime continu — préparation TP

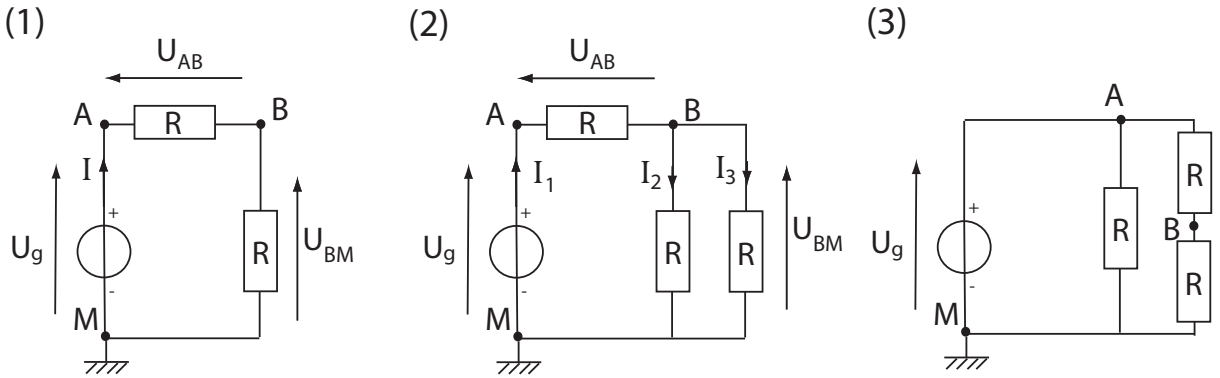


Figure 2. – Schémas de 3 circuits.

On considère ici trois circuits (fig. 2) constitués de résistances R et d'un générateur de tension U_g (R et U_g sont connus : ce sont les paramètres imposés par l'expérimentateur). L'objectif est de calculer les tensions et courants dans chaque portion de ces circuits.

On visera d'appliquer une seule méthode : identifier les inconnues, écrire toutes les lois des mailles/des noeuds/d'Ohm, résoudre le système d'équations. On irait plus vite en appliquant des notions de résistance équivalente et de pont diviseur de tension, mais on ne cherchera pas à faire utiliser cette méthode par les étudiants car elle demande une trop grande maîtrise des concepts d'électrocinétique. Ceux qui la connaissent peuvent évidemment l'utiliser.

Pour le circuit (1), on commence par repérer les inconnues : ici elles ont déjà été indiquées sur le schéma, il s'agit de l'intensité I et des tensions U_{AB} et U_{BM} ; il y a donc 3 inconnues, il faudra écrire 3 équations reliant entre elles ces inconnues afin de résoudre le problème.

- On ne peut pas écrire de loi des noeuds : il n'y a pas de noeud.
- Ecrire la loi des mailles.
- Ecrire la loi d'Ohm pour chacune des résistances (en prenant garde à bien orienter les tensions et intensités : convention récepteur).
- Manipuler les 3 équations obtenues afin d'obtenir l'expression de I, U_{AB} et U_{BM} en fonction de U_g et R.
- Retrouver les résultats en appliquant les notions de résistance équivalente et pont diviseur de tension.

Le cas du circuit (2) pourra être traité de la même façon :

- Cette fois on a 5 inconnues : I_1, I_2, I_3, U_{AB} et U_{BM}.
- Ecrire la loi des noeuds.
- Ecrire la loi des mailles.
- Ecrire la loi d'Ohm.
- Manipuler les 5 équations obtenues afin d'obtenir l'expression des 5 inconnues en fonction de U_g et R.
- Retrouver les résultats en appliquant les notions de résistance équivalente et pont diviseur de tension.

On résoudra le cas du circuit (3) de la même façon, en définissant sur le schéma du circuit les inconnues du problème, en écrivant les lois des mailles, des noeuds et d'Ohm autant de fois que nécessaire afin d'obtenir un nombre suffisant d'équations (distinctes) puis en résolvant le système d'équations.

Circuit (1) :
$U_{AB} + U_{BM} = U_{AM} = U_g$ (loi des mailles)
$U_{AB} = RI$, $U_{BM} = RI$ (loi d'Ohm)
Conclusion : $U_{AB} = U_{BM} = U_g/2$ et $I = U_g/2R$.

Circuit (2) :
$I_2 + I_3 = I_1$ (loi des noeuds)
$U_{AB} + U_{BM} = U_{AM} = U_g$ (loi des mailles)
$U_{BM} = RI_2 = R_I3$ et $U_{AB} = RI_1$ (loi d'Ohm)
donc $U_{BM} = U_g/3$, $U_{AB} = 2U_g/3$ et $I_2 = I_3 = I_1/2 = U_g/3R$.

Circuit (3) : on peut définir les inconnues de plusieurs façons différentes, par exemple considérer que U_{AM} est une inconnue si on n'a pas vu qu'elle est égale à U_g. Considérons comme inconnues U_{AB}, U_{BM}, et les intensités I_1, I_2 et I_3 définies comme en (2). On trouve finalement :
$U_{AB} = U_{BM} = U_g/2$ et $I_3 = I_2/2 = I_1/3 = U_g/2R$

Exercice II. Charge d'un condensateur

On considère maintenant un « circuit RC » comprenant une résistance R et un condensateur de capacité C en série, alimenté par une tension continue U_g (fig. 3). On note U_C la tension aux bornes du condensateur. Le circuit est muni d'un interrupteur qui sera tout d'abord ouvert[※1]. On part d'un condensateur déchargé (tension $U_C = 0$) et, à $t = 0$, on ferme l'interrupteur de sorte que le condensateur va se charger.

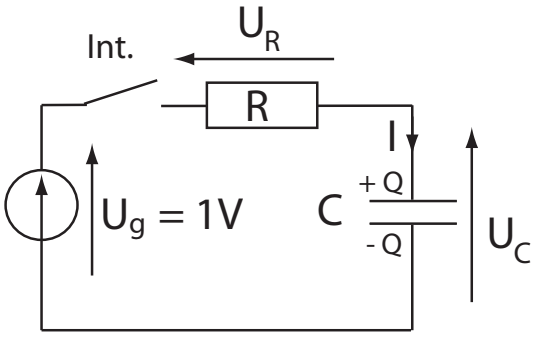


Figure 3. – Schéma de principe du circuit RC.

On rappelle que les faces du condensateur portent les charges $+Q$ et $-Q$ avec $Q = CU_C$ et que l'intensité qui traverse le condensateur est $I = dQ/dt = C.dU_C/dt$. La charge du condensateur reste donc constante tant que l'interrupteur est ouvert ($I = 0$). Quand l'interrupteur est fermé, le générateur charge le condensateur jusqu'à la tension U_g. Le condensateur ne se charge pas instantanément (il faudrait que $I = dQ/dt$ soit infinie), l'objectif de cette partie est donc d'étudier la dynamique de la charge.

1. Montrer que U_C obéit à l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{\tau}\,U_C(t) = \frac{1}{\tau}\,U_g$$

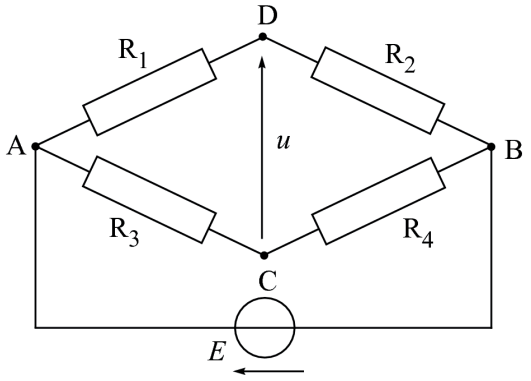
1. « interrupteur ouvert » = le courant ne passe pas, « interrupteur fermé » = le circuit est fermé, le courant passe

2. Exprimer τ en fonction de R et C. Résoudre cette équation (avec $U_C(0) = 0$) et exprimer $U_C(t)$.

$\tau = RC$ et $U_C(t) = U_g(1 - \exp(-t/RC))$

Exercice III (facultatif). Pont de Wheatstone

Un pont de Wheatstone est un montage électrique permettant de mesurer une résistance inconnue. La résistance à déterminer est R_1. Les résistances R_3 et R_4 sont fixes et connues. R_2 est une résistance variable dont on connaît la valeur. Le pont est dit équilibré lorsque R_2 a été réglée pour que la tension u mesurée entre C et D soit nulle.



1. Déterminer la tension u en fonction de E et des résistances R_1, R_2, R_3 et R_4.

$$u = \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right).E$$

2. Pour quelle relation entre $\frac{R_4}{R_3}$ et $\frac{R_2}{R_1}$ le pont est-il équilibré ? Déterminer alors R_1 en fonction des autres résistances.

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

3. Application numérique : $E = 6$ Volts ; $R_3 = 100\ \Omega$; $R_4 = 5\ k\Omega$; $R_2 = 1827\ \Omega$. Donner la valeur de R_1.

$$R_1 = 36{,}5\ V$$

TD n° 3. Électrocinétique 3

Exercice I. Composants R, L et C en régime alternatif

On utilise un générateur de tension délivrant une tension sinusoïdale dépendant du temps $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$. Avec ce générateur, on alimente un composant qui est soit une résistance R, soit un condensateur de capacité C, soit une bobine d'inductance L.

1. Exprimez $I(t)$ dans les trois cas (on pourra poser $\langle I \rangle = 0$).

   $R :\longrightarrow I_R(t) = \frac{U_0}{R} cos(\omega t)$
   $C :\longrightarrow I_C(t) = -CU_0\omega sin(\omega t)$
   $L :\longrightarrow I_L(t) = \frac{U_0}{\omega L} sin(\omega t)$ + Constante d'intégration = 0 (parce que $\langle I \rangle = 0$)

2. Exprimez la puissance instantanée reçue par chacun des trois composants (R, C et L). Une ampoule à filament en régime stationnaire se comporte comme une résistance et fournit une puissance lumineuse proportionnelle à la puissance électrique qu'elle reçoit. Sachant qu'EDF délivre une tension sinusoïdale d'amplitude maximale U_0= 325 V et de fréquence 50 Hz, à quelle fréquence oscille la puissance lumineuse ?

   $P_R(t) = U(t).I_R(t) = U_0 cos(\omega t).\frac{U_0}{R} cos(\omega t) = \frac{U_0^2}{R} cos^2(\omega t)$
   $P_C(t) = U(t).I_C(t) = U_0 cos(\omega t).(-CU_0\omega sin(\omega t)) = -CU_0^2\omega cos(\omega t) sin(\omega t)$
   $P_L(t) = U(t).I_L(t) = U_0 cos(\omega t).\frac{U_0}{\omega L} sin(\omega t) = \frac{U_0^2}{\omega L} cos(\omega t) sin(\omega t)$
   La puissance lumineuse émise par une ampoule oscille donc à la fréquence 100 Hz.

3. Calculer en intégrant sur une période la puissance moyenne $\langle P \rangle$ reçue par chacun des trois composants.

   $< P_R >= \frac{U_0^2}{2R}$
   $< P_C >= 0$
   $< P_L >= 0$
   C'est l'occasion d'expliquer aux étudiants qu'à tout instant la résistance est dissipative car la puissance instantanée est toujours positive tandis que pour les deux autres composants la puissance passe par des phases positives et négatives.

4. Par quelle tension *constante* notée U_{eff} (tension efficace) faudrait-il alimenter R pour obtenir une puissance identique à celle calculée dans le régime alternatif ?

   $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$
   Bien expliquer la notion de tension efficace et préciser que le 220 V du secteur correspond à une tension efficace.

Exercice II. Filtre RC

Le circuit ci-dessous, composé d'une résistance R en série avec un condensateur de capacité C, est alimenté par une tension $u_e(t) = U_e \cos(\omega t + \phi_e)$ sinusoïdale de pulsation ω, d'amplitude U_e et de phase ϕ_e. On souhaite déterminer la tension $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \phi_s)$ aux bornes de la résistance. On note $\underline{u_e} = U_e \exp(j(\omega t + \phi_e))$ et $\underline{u_s} = U_s \exp(j(\omega t + \phi_s))$ les tensions complexes respectivement associées à $u_e(t)$ et $u_s(t)$ (avec $j^2 = -1$).

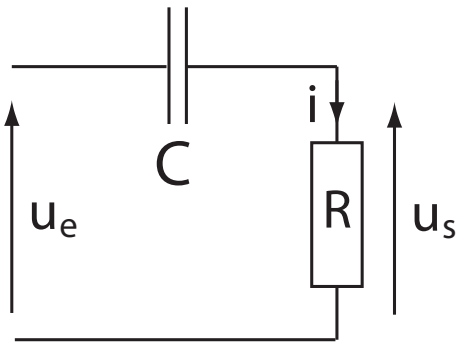


Figure 4. – Schéma du circuit RC.

1. En s'aidant des notions de tension, d'intensité et d'impédance complexes, déterminer $\underline{u_s}$ en fonction de $\underline{u_e}$, R, C et ω. On rappelle les impédances complexes de la résistance : $Z_R = R$ et du condensateur : $Z_C = 1/(Cj\omega)$.
2. On définit pour ce circuit la fonction de transfert suivante[2] : $H(\omega) = \underline{u_s}/\underline{u_e}$. Montrer que :

$$H(\omega) = \frac{j(\omega/\omega_c)}{1 + j(\omega/\omega_c)}$$

et exprimer la *pulsation de coupure* ω_c en fonction de R et C.

$$\omega_c = 1/RC$$

3. Cette fonction de transfert est caractérisée par son module appelé *gain* $G(\omega) = |H(\omega)| = U_s/U_e$. Montrer que[3] le gain est donné par

$$G(\omega) = \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

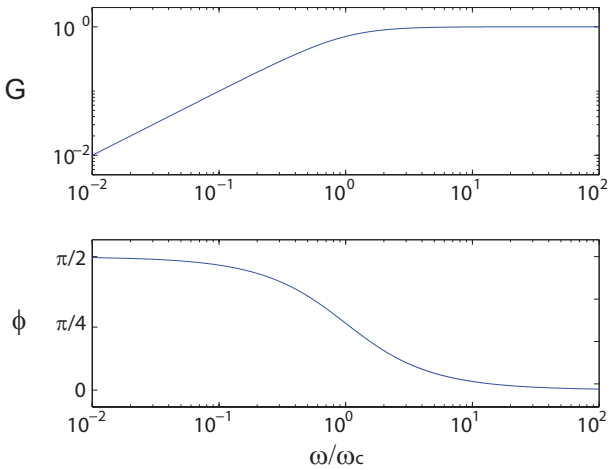
Que vaut $G(\omega \to 0)$? $G(\omega_c)$? $G(\omega \to \infty)$? Tracer l'allure de la courbe $G(\omega)$. Quelle est la nature (passe-...) du filtre ?

4. Cette fonction de transfert est également caractérisée par son argument $\phi = \arg(H) = \phi_s - \phi_e$ qui donne le déphasage entre tension d'entrée et tension de sortie.

Montrer[4] que $\phi = \pi/2 - \text{atan}(\omega/\omega_c)$. Que vaut ϕ pour $\omega \to 0$? $\omega = \omega_c$? $\omega \to \infty$? Tracer l'allure de la courbe $\phi(\omega)$.

Ci-dessous les courbes $G(\omega/\omega_c)$ et $\phi(\omega/\omega_c)$:

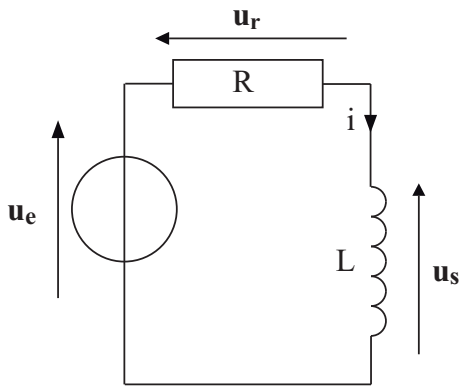
2. Cette fonction est traditionnellement notée $H(\omega)$ car ω intervient toujours multipliée par j dans l'expression de la fonction.
3. On rappelle que, pour x et y réels, $|1/z| = 1/|z|$.
4. On rappelle que, si $z = x + jy$ avec x et y réels, $\phi = \arg(z)$ vérifie $\phi = \text{atan}(y/x)$ si $x > 0$ - et $\phi = \pi/2$ si $x = 0$ et $y > 0$. D'autre part, $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.


G
10 0
10−2
10−2
10−1
100
101
102
ϕ
π/2
π/4
0
ω/ωc

TD n° 4. Électrocinétique 4

Exercice I. Circuit RL en régime sinusoïdal

Le circuit ci-dessous, composé d'une résistance R montée en série avec une bobine d'inductance L est alimenté par un générateur de tension alternative délivrant une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_e \cos(\omega t + \phi_e)$ de pulsation ω, d'amplitude U_e et de phase ϕ_e. On souhaite étudier la tension $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \phi_s)$.



1. Exprimer les tensions $\underline{u_e}$ et $\underline{u_s}$ en notation complexe.

$$\underline{u_e} = U_e \exp\left(j\phi_e\right) \exp(j\omega t)$$

L'amplitude complexe est : $U_e \exp\left(j\phi_e\right)$.

$$\underline{u_s} = U_s \exp\left(j\phi_s\right) \exp(j\omega t)$$

L'amplitude complexe est : $U_s \exp\left(j\phi_e\right)$.

2. Écrire trois équations en utilisant la loi des mailles et la loi d'Ohm entre $\underline{u_e}$, $\underline{u_s}$, $\underline{u_r}$ et $\underline{i}$. En déduire l'expression de $\underline{u_s}$ en fonction de $\underline{u_e}$, R, L et ω.

Loi des mailles :
$\underline{u_e} = \underline{u_s} + \underline{u_r}$
Loi d'Ohm :
$\underline{u_r} = R\underline{i}$
$\underline{u_s} = j\omega L\underline{i}$
d'où :
$\underline{u_e} = R\underline{i} + j\omega L\underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{u_e}}{R+j\omega L}$
$\underline{u_s} = j\omega L \frac{\underline{u_e}}{R+j\omega L}$
$\underline{u_s} = \frac{j\omega L}{R+j\omega L} \underline{u_e}$

3. On définit la fonction de transfert suivante $\underline{H(\omega)} = \underline{u_s}/\underline{u_e}$. Exprimer $\underline{H(\omega)}$ en fonction de ω et de ω_c défini comme $\omega_c = \frac{R}{L}$ (fréquence de coupure).

$$\underline{H(\omega)} = \frac{j\omega L}{R+j\omega L} = \frac{1}{\frac{R}{j\omega L}+1} = \frac{1}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$$

4. A partir de cette fonction de transfert, on peut définir le gain $G(\omega) = \left|\underline{H(\omega)}\right| = U_s/U_e$ qui donne le rapport de l'amplitude U_s de la tension de sortie par rapport à U_e celle de la tension d'entrée. Exprimer ce gain.

$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$

5. Quelles sont les valeurs de $G(\omega)$ pour $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$, $\omega = \omega_c$?

$G(0) = 0 \qquad G(\infty) = 1 \qquad G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6. Tracer l'allure de la courbe $G(\omega)$. Quel type de filtre représente ce circuit ?

C'est un circuit passe-haut (ou coupe-bas).

Exercice II. Circuit RLC en série

Le circuit ci-dessous, composé d'une résistance R en série avec une bobine de coefficient d'auto-induction L et d'un condensateur de capacité C, est alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t)$ de pulsation ω. On souhaite déterminer la tension $u_s(t)$ aux bornes de la résistance. On note $\underline{u_e}$ et $\underline{u_s}$ les grandeurs complexes respectivement associées à $u_e(t)$ et $u_s(t)$, et on cherche la fonction de transfert $H(\omega) = \underline{u_s}/\underline{u_e}$.

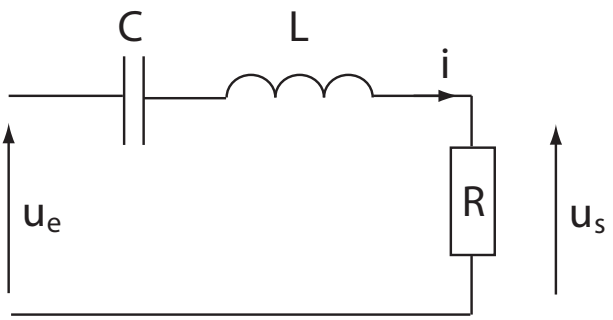


Figure 5. – Schéma du circuit RLC en série.

1. Exprimer l'intensité complexe $\underline{i}$ en fonction de $\underline{u_e}$, R, L, C et ω. On rappelle l'impédance complexe d'une bobine : $Z_L = j\omega L$.
2. En déduire que la fonction de transfert s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{R}{R + Lj\omega + 1/(Cj\omega)} \tag{1}$$

et réécrire cette expression sous la forme :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{2}$$

en donnant pour ω_0 et Q les valeurs adéquates.

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = L\omega_0/R$.

3. Exprimer le gain $G(\omega) = |H(\omega)|$.

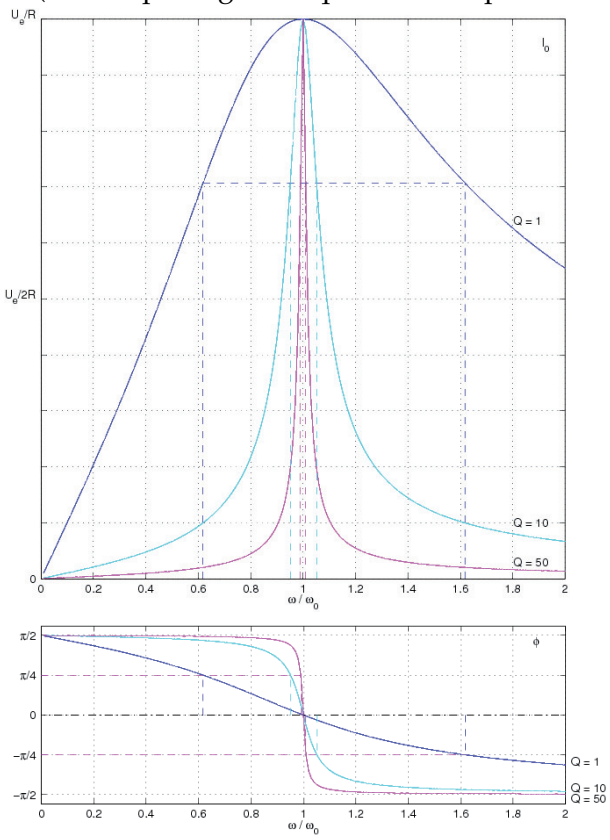
4. Montrer que la valeur maximale de $G(\omega)$ est $G_{max} = 1$; pour quelle valeur de ω cette valeur est-elle atteinte ? (NB cette valeur de ω constitue la *pulsation de résonance* du circuit) On admettra que la fonction $G(\omega)$ ne présente pas d'autre maximum.

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

La valeur maximale de 1 est atteinte en $\omega = \omega_0$.

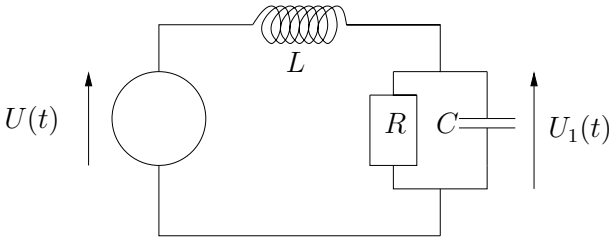
5. Quelle est la valeur de G dans la limite $\omega \to 0$? et dans la limite $\omega \to \infty$? Tracer l'allure de la courbe $G(\omega)$. De quel type de circuit (passe-...) s'agit-il ?

Les courbes de gain (et de déphasage bien que ce ne soit pas demandé) sont tracées ci-dessous :



Exercice III. Circuit RLC (partiel 2019-2020)

On considère le circuit ci-dessous, composé d'un générateur délivrant une tension sinusoïdale $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$, d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.



1. Exprimer $U(t)$ et $U_1(t)$ en notation complexe $\underline{u}$ et $\underline{u_1}$.

2. En utilisant la loi des nœuds et la loi d'Ohm généralisée $\underline{u} = \underline{i}\,Z$ (ou $\underline{i}$ est l'intensité complexe et Z l'impédance complexe), calculer l'impédance équivalente de l'ensemble de la résistance et du condensateur. On rappelle que $Z_C = 1/(j\omega C)$.
3. Calculer l'impédance équivalente de l'ensemble de la résistance, du condensateur et de la bobine d'inductance. On rappelle que $Z_L = j\omega L$.
4. On définit la fonction de transfert suivante $H(\omega) = \underline{u_1}/\underline{u}$. Montrer qu'elle peut s'écrire
$$H(\omega) = \frac{1}{(1-\omega^2 CL) + j\omega L/R}\,.$$
5. Calculer le gain $G(\omega) = |H(\omega)|$.
6. Montrer qu'il y a une fréquence de résonance (maximum de $G(\omega)$) pour $\omega_c = \sqrt{1/(CL) - 1/(2(RC)^2)}$ si $L < 2CR^2$.
7. Quelles sont les valeurs de $G(\omega)$ pour $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$, $\omega = \omega_c$?
8. Tracer l'allure de la courbe $G(\omega)$ si *(i)* $L > 2CR^2$ et (ii) $L < 2CR^2$. S'agit t'il d'un filtre passe-haut ou passe-bas?

Exercice IV (facultatif). Flash stroboscopique

Le flash stroboscopique a été inventé en 1937 par Harold Eugene Edgerton professeur au MIT et permet de décomposer des mouvements comme sur la photo. Les éclairs de flash se succèdent à intervalles de temps réguliers permettent de figer à chaque fois la position du joueur. Le circuit schématisé sur la figure ci-contre permet de fabriquer un flash stroboscopique. Le générateur de tension U_g charge, à travers la résistance R, le condensateur C par le biais de l'interrupteur IA. Quand la tension U_{AM} atteint une valeur de consigne U_0 ($U_0 < U_g$) l'interrupteur I bascule sur la position AB et le condensateur se décharge dans le flash de façon quasi instantanée ($10^{-4}s$). Puis l'interrupteur revient en position IA et le cycle recommence.

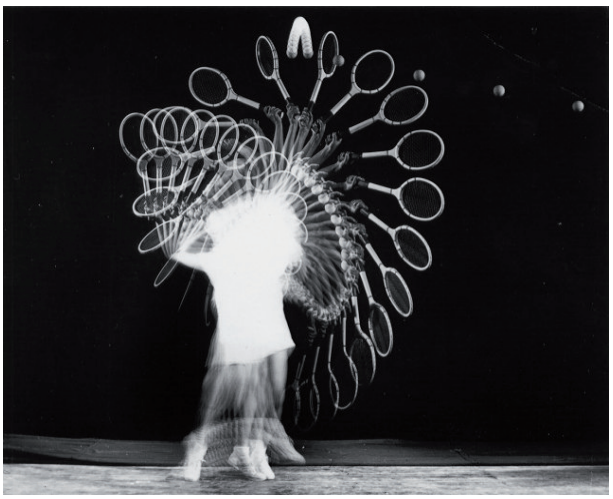


Figure 6. – Photo stroboscopique d'un service au tennis faite par Harold Eugene Edgerson (1939)

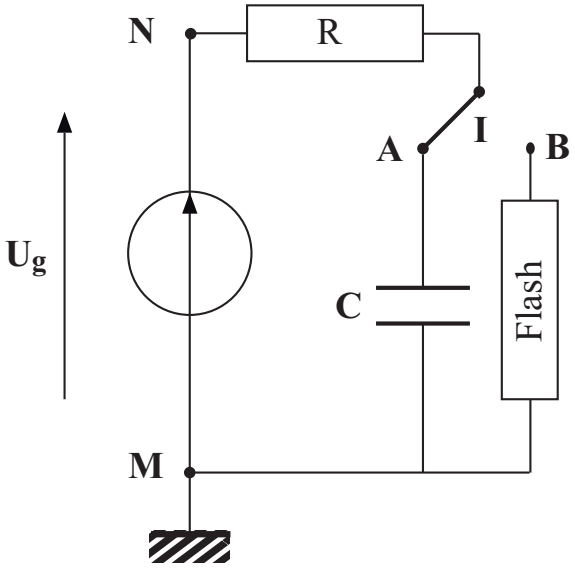


Figure 7. – Schéma du circuit

1. Montrer que U_{AM} obéit à une équation différentielle du premier ordre.

Loi des mailles :
$U_g = U_{NA}(t) + U_{AM}(t)$
Relation aux bornes de C :
$i(t) = C\,\frac{dU_{AM}(t)}{dt}$
Equation différentielle :
$U_g = RC\,\frac{dU_{AM}(t)}{dt} + U_{AM}(t)$

2. Résoudre cette équation (avec $U_{AM}(0) = 0$) et exprimer $U_{AM}(t)$.

$$U_{AM}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)U_g$$

3. Exprimer le temps t_c nécessaire à ce que $U_{AM} = U_0$

$$\frac{U_0}{U_g} = 1 - e^{-\frac{t_c}{RC}}$$
$$1 - \frac{U_0}{U_g} = e^{-\frac{t_c}{RC}}$$
$$\ln\left(1 - \frac{U_0}{U_g}\right) = -\frac{t_c}{RC}$$
$$t_c = -RC\ \ln\left(\frac{U_g - U_0}{U_g}\right)$$
$$t_c = RC\ \ln\left(\frac{U_g}{U_g - U_0}\right)$$

4. Vers quelle valeur tend t_c quand U_0 tend vers U_g ?

$$t_c \to \infty$$

5. Questions supplémentaires

   a. Dans le cas où l'interrupteur est dans la position IA, exprimer l'équation du courant $i(t)$. En déduire la puissance instantanée ($P_g(t)$) fournie par le générateur, celle reçue par la résistance ($P_r(t)$) et celle reçue par le condensateur ($P_c(t)$).

$$i(t) = C\,\frac{dU_{AM}(t)}{dt}$$
$$i(t) = C\,\frac{d\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{dt}\,U_g = C\,\frac{1}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}\,U_g = \frac{U_g}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$
$$P_g(t) = \frac{U_g^2}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$
$$P_r(t) = \frac{U_g^2}{R}\,e^{-\frac{2t}{RC}}$$
$$P_c(t) = \frac{U_g^2}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

   b. En intégrant ces équations entre $t = 0$ et $t = \infty$ (dans le cas $U_0 \to U_g$: charge complète), en déduire l'énergie fournie par le générateur E_g, celle dissipée dans la résistance E_r et celle stockée dans le condensateur E_c .

$$E_g = \int_0^\infty \frac{U_g^2}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}\,dt = CU_g^2$$
$$E_r = \frac{CU_g^2}{2}$$
$$E_c = \frac{CU_g^2}{2}$$

   c. On définit le rendement $\gamma = \frac{E_c}{E_g}$. Calculer cette valeur quand $U_0 \to U_g$.

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

TD n° 5. Forces électrostatiques

Exercice I. Forces comparées

Comparer, en grandeur et en sens, les forces exercées sur l'électron par l'attraction coulombienne et l'attraction gravitationnelle pour l'atome d'Hydrogène. On donne $G = 6{,}7\times10^{-11}$ S.I., $m_{e^-} = 9\times10^{-31}$ kg, $m_p = 1858\ m_{e^-}$, $q = 1{,}6\times10^{-19}$ C. La distance e^-- proton est typiquement de $r = 52{,}9\ 10^{-12}$m.

Exercice II

Trois charges Q_A, Q_B et Q_C sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de $\sqrt{3}$m de côté et une quatrième $Q_G = +1\mu$C au centre de gravité de ce triangle. Déterminer la résultante des forces électrostatiques exercée sur Q_G si :

- $Q_A = Q_B = Q_C = +1\mu$C
- $Q_A = Q_B = +1\mu$C et $Q_C = -1\mu$C
- $Q_A = Q_B = +1\mu$C et $Q_C = +2\mu C$

Exercice III. Expérience de Millikan

Au début du XXième siècle, l'américain Millikan a fait une expérience permettant (i) de constater la nature discrète de la charge électrique, et (ii) de mesure la charge électrique élémentaire.

Cette expérience est décrite sur le figure 1.

Tous les paramètres de l'expérience sont connus ou contrôlé par Millikan à l'exception de la taille des gouttelettes.

Dans un premier temps l'expérience consiste à mesurer la vitesse de chute des gouttelettes en absence de champ électrostatique.; ceci permet d'en déduire le rayon (on considère les gouttelettes comme des sphères). Dans une seconde étape, les plaques sont chargées de façon à ce que la gouttelette se déplace vers le haut. La connaissance des dimensions de la gouttelette et la mesure de sa nouvelle vitesse permettent d'en déduire la charge totale de la gouttelette.

Données : viscosité de l'air η=1,825.10^{-5} Pa.s ; masse volumique de l'air ρ= 1,2 kg/m^3; masse volumique de l'huile σ=0,92.10^3 kg/m^3

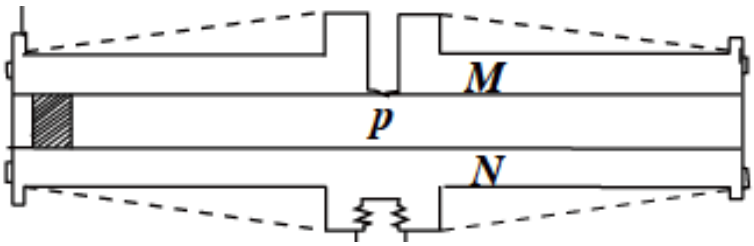


Figure 8. – *Schéma de l'expérience. Des gouttelettes d'huile sont chargées par friction et projetées par un atomiseur. M et N sont des plaques circulaires en laiton distantes de 16 mm et permettant d'appliquer un champ électrostatique grâce à une batterie de 10 000 volts. Les gouttelettes pénètrent dans la zone p en passant par un trou dans la plaque M. La charge de la gouttelette peut être modifiée au cours de l'expérience grâce à des rayons X ionisants passant entre les palques.*

1. Faire un bilan des forces s'appliquant sur une gouttelette quand on n'applique pas de champ. Les écrire vectoriellement en orientant l'axe vertical vers le haut.
2. La gouttelette atteint un régime stationnaire très rapidement et sa vitesse v_1 devient constante. Appliquer la deuxième loi de Newton et en déduire le rayon a de la gouttelette en fonction de v_1, η, ρ, σ et g.

3. Quand on applique un champ $\vec{E}$ entre les plaques, la gouttelette atteint rapidement une nouvelle vitesse constante v_2. Montrer comment on peut calculer la charge totale Q de la gouttelette connaissant la valeur de v_2.
4. En répétant la mesure sur un grand nombre de gouttelettes, Millikan a pu mettre en évidence que la charge portée était un multiple d'une charge élémentaire.
   Pour une gouttelette non soumise au champ électrostatique, Millikan a mesuré un temps moyen de chute de 11,88 s sur une distance de 10,21 mm. Avec une tension de 5089 volts appliquée, il a mesuré un temps de remontée de 80,708 s sur la même distance.
   Quel était le nombre de charges que portaient cette gouttelette (la valeur de e admise aujourd'hui est $1{,}602.10^{-19}$ C) ?

1. Poids + Archimède + force de frottement
2. $a = \sqrt{\dfrac{9\eta v_1}{2g(\rho - \sigma)}}$; attention, v_1 est négatif.
3. $-6\pi\eta a v_2 + \dfrac{4}{3}\pi a^3 g(\rho - \sigma) = QE$; attention v_2 est positif.
   On en déduit Q.
4. On trouve $Q = -2{,}92.10^{-18}$ C, d'où $Q \approx -18e$.