UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence de mathématiques - Intégration et Probabilités (L2/L4) - 2003-2004

Devoir numéro 1

1. Soit E un ensemble. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus de E. Montrer que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est une tribu.

2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ suite d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n. Montrer que $\mu(\cup_{n\geq 0} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \uparrow \mu(A_n)$.

3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ suite d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout n. On suppose que $\mu(B_0) < \infty$. Montrer que $\mu(\cap_{n\geq 0} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \downarrow \mu(B_n)$.

4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ (l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels) est dénombrable.

5. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $0 < \mu(A) < \infty$. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathcal{A} & \to & [0, +\infty] \\ B & \mapsto & \dfrac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} \end{array}$$

   est une mesure de probabilité.

6. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx, \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx, \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)} dx.$$

   Pour quelles valeurs de α l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

   est-elle convergente ?

7. On prend $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$. Montrer que $\mu = \sum_{k=1}^n p_k \delta_k$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et que $\mu(\mathbb{N}) = 1$. (On rappelle la définition : $\delta_k(A) = 1$ si $k \in A$ et $\delta_k(A) = 0$ sinon.)

8. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que $\{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.

9. Soit A une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Montrer que A est un borélien. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(A) = 0$.

10. Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux ensembles mesurés. Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$ et $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$une fonction mesurable. Soit

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathcal{B} & \to & [0, +\infty] \\ B & \mapsto & \nu(B) = \mu(f^{-1}(B). \end{array}$$

    Montrer que ν est une mesure.

11. (a) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = e^{-x}/(1 - e^{-x})$. Cette fonction est-elle mesurable (par rapport à la tribu de Borel) ?
    (b) Montrer que $\forall x > 0$, $\sum_{n\geq 1} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{ne^n}$.

12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décroissante continue.
    (a) Pourquoi f est-elle borélienne ?
    (b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x^n)dx$.

13. Énoncer le théorème de convergence monotone. Montrer à l'aide de ce théorème que :

$$S := \int_0^1 \sum_{n\geq 1} x^{2^n-1}dx = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 x^{2^n-1}dx.$$

    Calculer S.

14. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ positive mesurable. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathcal{A} & \to & [0, +\infty] \\ A & \mapsto & \displaystyle\int_A f d\mu \end{array}$$

    est une mesure.