UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence de mathématiques - Intégration et Probabilités (L4) - 2003-2004

Devoir numéro 2

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et que Y suit une loi de Poisson de paramètre μ. Calculer la loi de $X+Y$.

2. Soit (X,Y) deux variables aléatoires de loi de densité $\frac{3}{8}(x^2+y^2)\mathbf{1}_{|x|<1,|y|<1}$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la loi de X.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soient $u,v>0$, montrer que $uX+vY$ et $-vX+uY$ sont indépendants.

4. L'angle U est une variable aléatoire uniforme dans $]-\pi/2,\pi/2[$. Z est l'ordonnée du point A. Calculer la loi de Z.

5. Soit (X,Y) variable aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ de densité $e^{-x}e^{-y}\mathbf{1}_{x\geq 0}\mathbf{1}_{y\geq 0}dxdy$. Calculer la loi de $X+Y$.

6. Soient X et Y variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$. Calculer la loi de X/Y.

7. Soit Y variable aléatoire réelle de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que $1/Y$ a même loi que Y.

8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $\mathbb{R}$ de lois μ et ν respectivement. Soit F la fonction de répartition de X. Montrer que $\mathbb{P}(X+Y\leq z)=\int_{\mathbb{R}}F(z-y)\nu(dy)$.

9. Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ variable aléatoire dans $\mathbb{R}^n$ de densité $\frac{1}{2^n}e^{-|x_1|}e^{-|x_1+x_2|}\ldots e^{-|x_1+\cdots+x_n|}$. Montrer que les variables $U_1=X_1, U_2=X_1+X_2,\ldots,U_n=X_1+\cdots+X_n$ sont indépendantes.

10. Soit X variable aléatoire de densité $\frac{2\mathbf{1}_{x\geq 0}}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que $Z=\frac{1-X^2}{1+X^2}$ a pour densité $\frac{\mathbf{1}_{-1\leq x\leq 1}}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.

11. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $\min(X_1,\ldots,X_n)$ a pour densité $nx^{n-1}\mathbf{1}_{x\in[0,1]}$ et que $\max(X_1,\ldots,X_n)$ a pour densité $n(1-x)^{n-1}\mathbf{1}_{x\in[0,1]}$.

12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que Y est de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $u\geq 0$, on note $L(u)=\mathbb{E}(e^{-uX})$. Montrer que $\mathbb{P}(Y>X)=L(\lambda)$.

13. Soit Y variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit $X=e^Y$.

    (a) Soit $x>0$. Calculer $\mathbb{P}(X\geq x)$.

(b) En déduire la densité de X.

14. Soit X variable aléatoire dans $\mathbb{R}$. Soient $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que X^α est de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ (on dit alors que X suit une loi de Weibull de paramètres (α, λ)).

    (a) Soit $x > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$.

    (b) En déduire la densité de X.