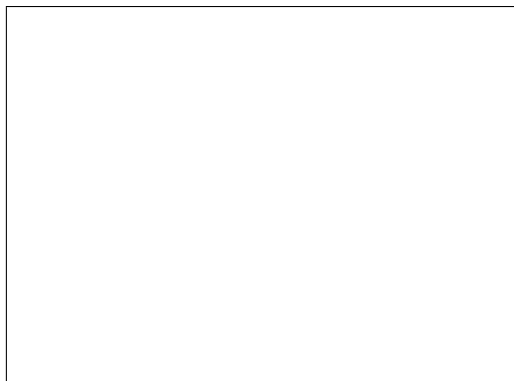


Devoir numéro 2

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et que Y suit une loi de Poisson de paramètre μ . Calculer la loi de $X + Y$.
2. Soit (X, Y) deux variables aléatoires de loi de densité $\frac{3}{8}(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{|x| < 1, |y| < 1}$ sur \mathbb{R}^2 . Calculer la loi de X .
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient $u, v > 0$, montrer que $uX + vY$ et $-vX + uY$ sont indépendants.
- 4.



L'angle U est une variable aléatoire uniforme dans $] -\pi/2, \pi/2[$. Z est l'ordonnée du point A . Calculer la loi de Z .

5. Soit (X, Y) variable aléatoire dans \mathbb{R}^2 de densité $e^{-x}e^{-y}\mathbf{1}_{x \geq 0}\mathbf{1}_{y \geq 0}dxdy$. Calculer la loi de $X + Y$.
6. Soient X et Y variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$. Calculer la loi de X/Y .
7. Soit Y variable aléatoire réelle de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que $1/Y$ a même loi que Y .
8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur \mathbb{R} de lois μ et ν respectivement. Soit F la fonction de répartition de X . Montrer que $\mathbb{P}(X + Y \leq z) = \int_{\mathbb{R}} F(z - y)\nu(dy)$.
9. Soit (X_1, \dots, X_n) variable aléatoire dans \mathbb{R}^n de densité $\frac{1}{2^n}e^{-|x_1|}e^{-|x_1+x_2|} \dots e^{-|x_1+\dots+x_n|}$. Montrer que les variables $U_1 = X_1, U_2 = X_1 + X_2, \dots, U_n = X_1 + \dots + X_n$ sont indépendantes.
10. Soit X variable aléatoire de densité $\frac{2\mathbf{1}_{x \geq 0}}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que $Z = \frac{1-X^2}{1+X^2}$ a pour densité $\frac{\mathbf{1}_{-1 \leq x \leq 1}}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.
11. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que $\min(X_1, \dots, X_n)$ a pour densité $n x^{n-1}\mathbf{1}_{x \in [0, 1]}$ et que $\max(X_1, \dots, X_n)$ a pour densité $n(1-x)^{n-1}\mathbf{1}_{x \in [0, 1]}$.
12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dans \mathbb{R}_+ . On suppose que Y est de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $u \geq 0$, on note $L(u) = \mathbb{E}(e^{-uX})$. Montrer que $\mathbb{P}(Y > X) = L(\lambda)$.
13. Soit Y variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit $X = e^Y$.
 - (a) Soit $x > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$.

- (b) En déduire la densité de X .
14. Soit X variable aléatoire dans \mathbb{R} . Soient $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que X^α est de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ (on dit alors que X suit une loi de Weibull de paramètres (α, λ)).
- (a) Soit $x > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$.
- (b) En déduire la densité de X .