UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2003-2004

Examen - 4 mai 2004

Durée : 2h.

Documents et calculatrices interdits.

La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.

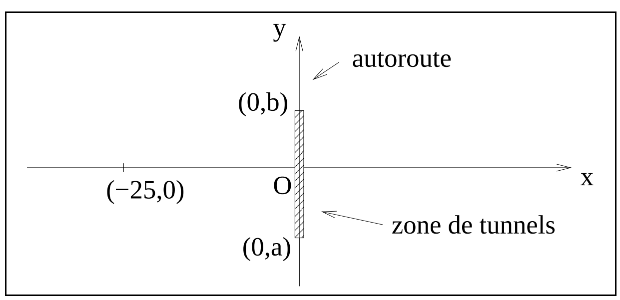
1. Question de cours
   Donner le théorème de dérivation globale sous l'intégrale.

2. Soient U de loi uniforme sur $[0,1]$ et X de loi exponentielle de paramètre 1 deux variables aléatoires réelles indépendantes.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(\sup(U,X) \leq t)$ dans les 3 cas suivants : $t < 0$, $t \in [0,1]$, $t > 1$.
   (b) Donner la densité de $\sup(U,X)$.

3. Pour sa migration annuelle, une grenouille part d'une mare située sur un plan au point de coordonnées $(-25,0)$ dans le repère orthonormé xOy. Elle est repérée par sa position Z_n au temps n. On suppose que :

$$\text{au temps 0, sa position est } Z_0 = (-25,0)$$
$$\text{et } \forall n \geq 0, Z_{n+1} = Z_n + (1,0) + U_n \ ,$$

   où les variables U_n sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(U_n = (0, 1/\sqrt{2})) = 1/2$, $\mathbb{P}(U_n = (0, -1/\sqrt{2})) = 1/2$. Ainsi à chaque étape de sa progression, la grenouille avance de $+1$ dans la direction Ox et se déporte en même temps de $\pm 1/\sqrt{2}$ dans la direction perpendiculaire Oy. Sur l'axe des ordonnées se trouve cette année une autoroute neuve. On décide de creuser des tunnels sous l'autoroute le long d'une certaine zone pour permettre le passage de cette grenouille. La zone à tunnels se situe entre des points d'ordonnées a et b. Si la grenouille arrive dans cette zone, elle passe dans un tunnel et sinon elle se fait écraser.



   (a) À quel instant passe-t-elle par l'autoroute ?
   (b) Supposons que l'on construise une zone de tunnels entre les points d'ordonnées -5 et 5 (compris). Donner une approximation de la probabilité qu'a la grenouille de passer par un tunnel. (Dans les calculs, on arrondira au deuxième chiffre après la virgule pour simplifier.)
   (c) On décide de construire une zone de tunnels entre des point d'ordonnées $-x$ et $+x$ ($x > 0$). Donner une valeur approximative de x telle que la probabilité de survie de la grenouille soit 0.9. (Dans les calculs, on arrondira au deuxième chiffre après la virgule pour simplifier.)

4. Au début de chaque année, on peut acheter un bon à 1 euro qui en vaudra a à la fin de l'année ($a > 1$). On peut aussi acheter des actions dont la valeur varie aléatoirement durant l'année. On dispose d'un certaine richesse (fixée) W_0 au temps 0. On note p la proportion de la richesse que l'on investit en bons ($p \in [0,1]$), le reste étant investi en actions. On admet que la richesse au temps $n+1$ est : $W_{n+1} = (ap + (1-p)V_{n+1})W_n$. Les V_n sont des variables aléatoires i.i.d. ≥ 0 telles que $\mathbb{E}(V_n) < \infty$, $\mathbb{E}(1/V_n) < \infty$, $\mathbb{E}(V_n^2) < \infty$, $\mathbb{E}(1/V_n^2) < \infty$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\ln(W_n)$ en fonction de W_0 et $V_1, \ldots, V_n$. On admet que les variables $\ln(ap + (1-p)V_n)$ sont intégrables pour tout p. Montrer que :

   $$\frac{1}{n}\ln(W_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} c(p)$$

   où $c(p)$ est une fonction de p que l'on exprimera sous forme d'une espérance.

   (b) En utilisant sans la démontrer l'inégalité

   $$\forall x > 0,\ \forall p \in [0,1]\ :\ \left|\frac{a-x}{ap+(1-p)x}\right| \leq 2 + \frac{x}{a} + \frac{a}{x}\ ,$$

   montrer que $c(p)$ est dérivable sur $]0,1[$ et exprimer sa dérivée sous forme d'une espérance. On admettra dans la suite que c est dérivable sur $[0,1]$ et que c' se prolonge sous la forme trouvée en 0 et en 1.

   (c) On admet que c' peut se dériver par le théorème de dérivation globale sous l'intégrale sur $[0,1]$. Exprimer c'' sous forme d'une espérance.

   (d) On rappelle que puisque c' est dérivable sur $[0,1]$, elle y est continue. On suppose que $\mathbb{E}(V_1/a) > 1$ et $\mathbb{E}(a/V_1) > 1$. En s'intéressant au sens de variation de c' et aux signes de $c'(0)$ et $c'(1)$, montrer que la proportion optimale p_0 (c'est à dire le p qui maximise $c(p)$) est dans $]0,1[$.