UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2003-2004

Feuille d'exercices numéro 1
Révisions et théorie de la mesure

1. Rappel : Si $f : E \to F$ et $A \subset F$, $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}$. Si $C \subset E$, $f(C) = \{f(x), x \in C\}$.
   On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
   (a) Déterminer $f([-3,-1])$, $f([-3,1])$, $f(]-3,1])$.
   (b) Déterminer $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}(]1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-1,0] \cup [1,2[)$
2. Rappel : Pour une famille d'ensemble $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $\bigcap_{n\geq 0} A_n = \{x : \forall n, x \in A_n\}$ et $\bigcup_{n\geq 0} A_n = \{x : \exists n \text{ tel que } x \in A_n\}$
   (a) Déterminer $\bigcap_{n\geq 0}]1, 1+1/(n+1)]$.
   (b) Déterminer $\bigcap_{n\geq 0}]1, 2+1/(n+1)]$.
   (c) Déterminer $\bigcap_{n\geq 0}]1-1/(n+1), 2]$.
   (d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\bigcup_{n\geq 0}[1/(n+1), +\infty[)$.
3. Soit $A_1, ..., A_n$ une partition de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i\in I} A_i : I \subset \{1, ..., n\}\}$ est une tribu.
   (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu et que si $\mathcal{B}$ est une tribu contenant $A_1, \ldots, A_n$ alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. (On dit que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant $A_1, \ldots, A_n$ et on note $\mathcal{A} = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$.)
4. Soit

$$\begin{array}{rcl} \text{Card} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & [0,+\infty] \\ A & \mapsto & \text{Card}(A) = \text{ le nombre d'éléments de } A\ . \end{array}$$

   Montrer que Card est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
5. On se donne un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.
   (a) Soit $x \in E$, on note

$$\begin{array}{rcl} \delta_x : \mathcal{A} & \to & [0,+\infty] \\ B & \mapsto & \delta_x(B) \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in B \\ = 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{array}$$

   Montrer que δ_x est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.
   (b) Soient $x_1, ..., x_k$ des éléments distincts de E et $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}_+^*$. On note

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{A} & \to & [0,+\infty] \\ B & \mapsto & \mu(B) = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq k} p_i \delta_{x_i}(B) \end{array}$$

   Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.