UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2003-2004

Feuille d'exercices numéro 2
Théorie de la mesure

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que λ (en tant que mesure) vérifie les propriétés suivantes :

- Croissance : si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $A \subset B$ alors $\lambda(A) \leq \lambda(B)$, si, de plus, $\lambda(A) < +\infty$, alors $\lambda(B \backslash A) = \lambda(B) - \lambda(A)$.
- Additivité : si $A_0, A_1, \cdots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont deux à deux disjoints alors $\lambda(\cup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n\geq 0} \lambda(A_n)$.
- Sous-additivité : si $A_0, A_1, \cdots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors $\lambda(\cup_{n\geq 0} A_n) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(A_n)$.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lambda(\{x\})$ (utiliser la propriété de croissance).
   (b) Soit $x_0, x_1, x_2, \cdots \in \mathbb{R}$, calculer $\lambda(\cup_{n\geq 0}\{x_n\})$ (utiliser la propriété de sous-additivité).
2. Calculer $\lambda([0,1]\backslash\mathbb{Q})$ (utiliser la propriété de croissance).
3. Soit $A = \cup_{n\geq 0}[n, n+\frac{1}{2^n}[$. Calculer $\lambda(A)$. (On se servira du fait que A est réunion d'ensembles disjoints et on utilisera la propriété d'additivité.)
4. Un autre ensemble de Cantor.
   Pour $n \geq 1$, on note :

   $$A_n = \{x \in [0,1[, x \text{ n'a que des 1 ou des 5 dans son développement décimal jusqu'à l'ordre } n\}.$$

   A_n est donc l'ensemble des $x \in [0,1[$ qui s'écrivent $x = 0, u_1 u_2 \ldots u_n u_{n+1} \ldots$ avec $u_1, \ldots, u_n \in \{1,5\}$.

   (a) Calculer $\lambda(A_n)$ pour tout n.
   (b) Soit $B = \cap_{n\geq 1} A_n$, calculer $\lambda(B)$ (utiliser la propriété de croissance).
5. Mesures à densité.

   (a) Soit ν mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu([0,1]), \mu([0,2])$, $\mu([0,1/2])$, $\mu(\{1/2\})$.
   (b) Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbf{1}_{x>0}e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu(\mathbb{R}), \mu(\{1\}), \mu([0,1]), \mu([1,+\infty[)$.