UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2003-2004

Feuille d'exercices numéro 4
Limites d'intégrales, intégrales à paramètre, intégrales multiples.

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} (\cos x)^n dx$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+nx^2} dx$
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{+1} e^{-nx^2} dx$.
2. Pour $u > 0$, on pose $F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ut)}{t} e^{-t} dt$.
   (a) Montrer que F est bien définie pour tout $u > 0$ et que F est continue sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que $F'(u) = \int_0^{+\infty} \cos(ut) e^{-t} dt$.
   (c) Par des intégrations par parties, montrer que $F'(u) = \frac{1}{1+u^2}$.
   (d) En déduire $F(u)$ à une constante près.
3. (a) Montrer que pour tout $y > 0$:
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}.$$
   (b) Montrer que :
   $$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx \right) dy = \frac{\pi^2}{2} \ .$$
   (c) Montrer que pour tout $x > 0, x \neq 1$:
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy = \frac{2\log(x)}{x^2-1} \ .$$
   (d) En déduire que :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4} \ .$$
4. On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En utilisant un changement de variable, calculer :
   $$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} dx dy \ .$$