UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence de mathématiques - Intégration et Probabilités (L2/L4) - 2003-2004

Feuille d'exercices semaine 4
Convergence d'intégrales, fonctions définies par une intégrale.

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} dx$
   (d) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} dx$.
   (e) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x} dx$

2. (a) Calculer $\int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 1}(e^{-nx}-2e^{-2nx})dx$.
   (b) Calculer $\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty}(e^{-nx}-2e^{-2nx})dx$. Que remarque-t-on ?

3. Fonction Gamma.
   Pour x réel, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
   (a) Quel est le domaine de définition de Γ ?
   (b) Montrer que Γ est continue sur son domaine de définition.
   (c) Montrer que Γ est C^∞ sur son domaine de définition.

4. Soit $\phi \in \mathcal{L}^1([0,1], dt)$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \int_0^1 \sqrt{\phi(t)^2+x}dt$.
   (a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Si $\frac{1}{\phi} \in \mathcal{L}^1([0,1], dt)$, montrer que F est dérivable à droite en 0.
   (c) Si F est dérivable à droite en 0, montrer que $\frac{1}{\phi} \in \mathcal{L}^1([0,1], dt)$ (on pourra utiliser le lemme de Fatou).

5. On pose pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = -\sum_{k=1}^n (-1)^k x^k$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leq \frac{2}{1+x}$.
   (b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

6. (a) Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,1], dt)$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx$.
   (b) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1-x}$ appartient à $\mathcal{L}^1([0,1], dt)$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx^n f(x)dx$.

7. Transformée de Fourier
   Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dt)$. On note : $\forall t \in \mathbb{R}, \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dx$.
   (a) Vérifier que $\widehat{f}$ est bien définie.
   (b) Montrer que $\widehat{f}$ est continue.
   (c) Si on suppose de plus que la fonction $x \mapsto xf(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dt)$, montrer que $\widehat{f}$ est dérivable et que $\left(\widehat{f}\right)'(0) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$.
   (d) Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dt)$. Montrer que $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et que $\widehat{f*g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$. (On rappelle que : $f*g(y) = \int_R f(y-x)g(x)dx$.)