UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence de mathématiques - Intégration et Probabilités (L2/L4) - 2003-2004

Feuille d'exercices semaine 5
Théorème de Fubini, calcul d'intégrales.

1. Montrer que :

$$\sum_{p\geq 1} \frac{1}{2^p p} = \log(2)$$

(on pourra utiliser que pour tout $p \geq 1$: $\frac{1}{2^p p} = \int_2^{+\infty} x^{-p-1} dx$).

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|e^{itx}}{e^{|x|}-1} dx = \sum_{k\geq 0} 2\frac{(k+1)^2 - t^2}{((k+1)^2+t^2)^2}$$

(on pourra utiliser que pour $x \neq 0$: $\frac{1}{1-e^{-|x|}} = \sum_{k\geq 0} e^{-k|x|}$).

3. Le but de l'exercice est de calculer $I = \int_0^\pi \frac{\log(1+\cos(x))}{\cos(x)} dx$.

   (a) Montrer que $I = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{1}{1+y\cos(x)} dx \right) dy$.

   (b) En utilisant la formule $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ et le changement de variable $t = \tan(x/2)$, montrer que pour tout $y \in]0,1[$:

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+y\cos(x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}} .$$

   (c) En déduire que $I = \frac{\pi^2}{2}$.

4. (a) Montrer que pour tout $y > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}.$$

   (b) Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx \right) dy = \frac{\pi^2}{2} .$$

   (c) Montrer que pour tout $x > 0, x \neq 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy = \frac{2\log(x)}{x^2-1} .$$

   (d) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4} .$$

   (e) Montrer que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2-1} dx = \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^2-1} dx$$

   (on pourra utiliser un changement de variable en $t = 1/x$).

(f) En déduire que :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(on pourra utiliser que pour $x \in]0,1[$: $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n\geq 0} x^{2n}$).