UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence de mathématiques - Intégration et Probabilités (L4) - 2003-2004

Feuille d'exercices numéro 7
Indépendance, calcul de lois

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que leurs lois ont des densités. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

3. Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes de même loi telles que : $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$. Soient $A_1 = \{X_2 = X_3\}$, $A_2 = \{X_1 = X_3\}$, $A_3 = \{X_1 = X_2\}$. Montrer que $\forall i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$. Les évènements $A_1 A_2, A_3$ sont-ils indépendants ?

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.

5. Pour $\alpha, \lambda \geq 0$, on note $f_{\alpha,\lambda}(x) = \mathbf{1}_{x \geq 0} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$. On appelle $\Gamma(\alpha, \lambda)$ la loi de densité $\frac{f_{\alpha,\lambda}(x)}{\int_{\mathbb{R}} f_{\alpha,\lambda}(u)du}$. Soient X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois $\Gamma(\alpha, \lambda)$ et $\Gamma(\beta, \lambda)$ respectivement.
   (a) Calculer la loi de $(X + Y, \frac{X}{X+Y})$. En déduire que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes.
   (b) Montrer que $X + Y$ est de loi $\Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$.

6. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ est de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
   (b) Soit $T = \inf\{n : X_n = 1\}$. Montrer que $T - 1$ est de loi $\mathcal{G}(p)$.

7. Soit X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et Y de loi $\mathcal{E}(\mu)$. On suppose que X et Y sont indépendantes.
   (a) Calculer la loi de $X \wedge Y$ et de $X \vee Y$.
   (b) $X \wedge Y$ et $X \vee Y$ sont-ils indépendants ?

8. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes réelles.
   (a) Montrer que $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$.
   (b) Soit Z de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer $\mathrm{Var}(Z)$.

9. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Quelle est la loi de S_n ? Rappeler la valeur de $\mathrm{Var}(S_n)$.
   (b) Soient $\epsilon, \delta > 0$. En utilisant l'inégalité de Markov, trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \epsilon$.
   (c) Application aux sondages.
   On veut faire un sondage avant une élection qui oppose deux candidats A et B. On suppose que les gens votent pour A avec probabilité p et votent B avec probabilité $1 - p$ ($0 \leq p \leq 1$ fixé). On suppose que les votes sont indépendants les uns des autres. Si on interroge un échantillon de n personnes, on estime la proportion de gens qui vont voter pour A au moment de l'élection (qui est exactement p) par la proportion de gens qui votent pour A dans l'échantillon. Trouver un entier N tel que si $n \geq N$ alors la proportion estimée est proche de p à 1 % près avec 95 % de chances.

10. Théorème de Stone Weierstrass.
Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne S_n variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,x)$. Soit f une fonction continue de $[0,1] \to \mathbb{R}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0,1]$, on note $P_n(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$. Montrer que P_n est une fonction polynômiale en x de degré $\leq n$.

   (b) Rappel : théorème de Heine. Toute fonction g continue sur [0,1] y est uniformément continue, c'est à dire que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que :

$$\text{pour tous } u, v \in [0,1],\ |u-v| \leq \delta \Rightarrow |g(u) - g(v)| \leq \epsilon\ .$$

   En utilisant le théorème de Heine, montrer que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \epsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right)\ .$$

   (c) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.

   (d) En déduire que $\forall \eta > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - P_n(x)| \leq \eta\ .$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : "Les fonctions polynômes de $[0,1] \to \mathbb{R}$ sont denses dans les fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$ pour la norme $\|.\|_\infty$."

11. X une variable aléatoire dans $\mathbb{R}$ est dite symétrique si $-X$ a même loi que X.

   (a) Si X a une loi de densité f, montrer que : X est symétrique si et seulement si $f(x) = f(-x)$ pour presque tout x.

   (b) Donner un exemple de de loi symétrique.

   (c) Montrer que X est symétrique si et seulement si le nombre $\mathbb{E}(e^{iuX})$ est réel $\forall u \in \mathbb{R}$.

   (d) Soit X variable aléatoire dans $\mathbb{R}$ symétrique. On suppose $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. On note :

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \\ -1 & \text{si } X < 0\ . \end{cases}$$

   Montrer que ϵ et X sont indépendantes.

   (e) Si Y et Y' sont deux variables aléatoires réelles de même loi et indépendantes, montrer que $Y - Y'$ est symétrique.