UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
TD d'intégration et probabilités (L4) - 2003-2004

Feuille d'exercices numéro 8
Lemme de Borel-Cantelli et loi des grands nombres

(1) Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles ≥ 0 telles que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(X_n) < \infty$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0$.

(2) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{B}(p_n)$ respectivement.

  (a) Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathrm{P})} 0$ si et seulement si $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  (b) Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0} p_n < \infty$.

(3) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires réelles positives indépendantes. Montrer que $\sup_{n\geq 1} X_n < \infty$ p.s. si et seulement si $\exists A > 0$ tel que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > A) < \infty$.

(4) On se donne des événements A_n indépendants avec $\mathbb{P}(A_n) < 1$, $\forall n$. Montrer que $\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} A_n) = 1$ implique

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1 \ .$$

<u>Indication :</u> Les séries $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(A_k)$ et $\sum_{k\geq 1} \log \mathbb{P}(A_k^c)$ sont de même nature.

(5) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires réelles ≥ 0 indépendantes de même loi avec $\mathbb{E}(X_1) = \infty$. On pose pour tout n, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et :

$$C = \{\omega : \lim_{n\to+\infty} (S_n/n) \text{ existe et } \in [0, +\infty[\} \ .$$

Montrer en utlisant la loi des grands nombres que $\mathbb{P}(C) = 0$.