UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
`http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Feuille d'exercices numéro 3

<u>Définition :</u> Soit (μ_n) une suite de mesures sur E. On dit que $\mu_n \overset{\text{étroitement}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mu_\infty$ si $\forall \phi$ continue, bornée, $\mu_n(\phi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_\infty(\phi)$.

1. Soit P noyau de transition sur un espace fini E. On suppose que

$$\forall x,\ P(x,y) \geq \alpha c(y) \tag{1}$$

où c mesure de probabilité sur E, $\alpha > 0$.

   (a) Soient μ, μ' mesures de probabilité sur E. On note $|\mu - \mu'| = \sum_{x\in E} |\mu(x) - \mu'(x)|$. Montrer que :
   $$|\mu P - \mu' P| \leq (1-\alpha)|\mu - \mu'|$$

   (b) Montrer que s'il existe une proba. invariante pour P, elle est unique. On admet qu'il existe une probabilité invariante.

   (c) Soit (X_n) chaîne de Markov de transition P de loi initiale $\mathcal{L}(X_0)$ quelconque. Montrer que $\mathcal{L}(X_n) \overset{\text{étroitement}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}}$ la loi invariante pour P.

   (d) Montrer que les résultats précédents sont encore vrais sous l'hypothèse : $\exists l \geq 1$ tel que $P^l(x,y) \geq \alpha c(y)$ $(\forall x, y)$.

   (e) On suppose que $P(x,y) = P(y,x)$ et que l'on a (1). On cherche à simuler suivant une loi de la forme $\mu(x) = Ce^{-\beta H(x)}$. Écrire une transition $\tilde{P}$ qui permet de construire l'algorithme de Metropolis.

   (f) Montrer que $\tilde{P}$ satisfait (1) et proposer méthode de simulation suivant μ.

2. <u>Fonctions itérées stochastiques</u> (cf. TD de Pierre Del Moral)
On se donne des applications $A_1, \dots, A_q : K \to K$ (K compact de $\mathbb{R}^d$) telles que $\forall x, y$, $\forall i$, $\|A_i(x) - A_i(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ pour un certain $\alpha < 1$. On appelle support (supp) d'une mesure μ (sur $\mathbb{R}^d$) le complémentaire de $\sup\{O \text{ ouvert}, \mu(O) = 0\}$. Soit $p_1, \dots, p_q \geq 0$ tels que $p_1 + \dots + p_q = 1$. Soit (X_n) chaîne de Markov telle que X_0 de loi μ_0 quelconque (à support dans K), $X_{n+1} = A_i(X_n)$ avec probabilité p_i. On note μ_n la loi de X_n.

   (a) (*) Montrer que $\mu_n \overset{\text{étroitement}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mu_\infty$ (une certaine mesure μ_∞).

   (b) Montrer que $\lambda(\text{supp}(\mu_\infty)) = 0$.

   (c) Montrer que pour toute fonction ϕ qui est C_ϕ-lipschitzienne, $|\mathbb{E}(\phi(X_n)) - \mu_\infty(\phi)| \leq C_\phi \alpha^n$.

   (d) On note $E = \text{supp}(\mu_\infty)$. Montrer que $E = A_1(E) \cup \dots \cup A_q(E)$ (ce qui donne une idée du caractère fractal de E).