UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Feuille d'exercices numéro 4

(C'est le devoir maison de l'année dernière.)
On considère un vecteur gaussien (G_1, G_2) où G_1 et G_2 sont de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et telles que $\mathrm{Cov}(G_1, G_2) = \rho$ avec $-1 < \rho < 1$. Le but de ce problème est de comparer diverses méthodes de réduction de variance pour le calcul de

$$I = \mathbb{E}((C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2} - K)_+) \ .$$

On pose :

$$X = (C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2} - K)_+ \ .$$

Sauf dans la dernière question, on prendra les constantes suivantes $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1,2$, $K = 1$, $\rho = 1/2$.

1. Soient g_1 et g_2 de loi $\mathcal{N}(0,1)$, *indépendantes*. Trouver des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ telles que $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) \overset{\text{loi}}{=} (G_1, G_2)$. En déduire une méthode de simulation de (G_1, G_2).
2. On veut calculer I par une méthode de Monte-Carlo simple. Écrire un programme qui calcule la variance de cette méthode. Combien d'itérations faut-il effectuer dans la méthode de Monte-Carlo pour avoir un résultat I_n qui approche I à 0.1 près avec 95% de chances ? Écrire une suite au programme précédent qui calcule I à 0.1 près avec 95% de chances.
3. Calculer $\mathbb{E}(e^{\sigma_1 G_1 + \sigma_2 G_2})$ pour σ_1 et σ_2 deux nombres réels.
4. Expliciter $\mathbb{E}(C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2})$ et proposer une technique de variable de contrôle visant à réduire la méthode de Monte-Carlo. Écrire un programme qui calcule $\mathrm{Var}(X)$. La variance a-t-elle été réduite ?
5. On pose

   $$Y_1 = e^{\lambda_1 G_1}, \ Y_2 = e^{\lambda_2 G_2} \ .$$

   On cherche à identifier la meilleure variable de contrôle de la forme $\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2$. Calculer explicitement la matrice de covariance de (Y_1, Y_2).
   En supposant que l'on connaît explicitement $\mathrm{Cov}(X, Y_1)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y_2)$, trouver un couple (μ_1^0, μ_2^0) permettant de minimiser $\mathrm{Var}(X - \mu_1 Y_1 - \mu_2 Y_2)$.
   Écrire un programme qui :
   - calcule $\mathrm{Cov}(X, Y_1)$, $\mathrm{Cov}(X, Y_2)$, μ_1^0, μ_2^0
   - calcule $\mathrm{Var}(X - \mu_1^0 Y_1 - \mu_2^0 Y_2)$.

   Comparer cette variance à $\mathrm{Var}(X)$ obtenue en question 2.
6. Montrer que si $\mu \in \mathbb{R}$ et f fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors

   $$\mathbb{E}(e^{-\mu g_1 - \frac{\mu^2}{2}} f(g_1 + \mu, g_2)) = \mathbb{E}(f(g_1, g_2) \ .$$

   En déduire μ_1, μ_2 fonctions de μ telles que $\forall f$:

   $$\mathbb{E}(e^{-\mu G_1 - \frac{\mu^2}{2}} f(G_1 + \mu_1, G_2 + \mu_2)) = \mathbb{E}(f(G_1, G_2)) \ .$$

7. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on pose

$$X_\mu = e^{-\mu G_1 - \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1 + \mu_1, G_2 + \mu_2) \text{ avec } \phi(x,y) = (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 y} - K)_+ \ .$$

   Montrer que $\mathbb{E}(X_\mu) = \mathbb{E}(X)$. Proposer une nouvelle méthode de calcul de I. Montrer que :

$$\mathrm{Var}(X_\mu) = \mathbb{E}(e^{-\mu G_1 + \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1, G_2)^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

   en déduire que :

$$\frac{d\mathrm{Var}(X_\mu)}{d\mu} = \mathbb{E}((-G_1 + \mu) e^{-\mu G_1 + \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1, G_2)^2) \ .$$

8. *On suppose désormais que $C_2 = 0$ (les autres constantes restent inchangées).* Montrer que si $\mu \leq d_1 = \frac{1}{\lambda_1} \log(K/C_1)$, $\frac{d\mathrm{Var}(X_\mu)}{d\mu} \leq 0$. Utiliser ce résultat pour choisir un μ tel que $\mathrm{Var}(X_\mu) \leq \mathrm{Var}(X)$. Écrire un programme qui calcule ces deux variances. Combien d'itérations faut-il effectuer dans la méthode de Monte-Carlo avec X_μ pour avoir un résultat I_n^μ qui approche I à 0.1 près avec 95% de chances ? Écrire une suite au programme qui calcule I (avec X_μ) à 0.1 près avec 95% de chances.