UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006
Sylvain Rubenthaler

Corrigé du partiel - 15/11/05

Durée : 2h.

Documents et calculatrices interdits.

La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.

1. (a) Si $x \in A_n$ alors $\exists k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $x \in I_k$ et donc $x \in A_{n+1}$.
   (b) Par la propriété de réunion croissante : $\lambda(\cup_{n\geq 0} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n)$.
   (c) Pour tout n, $I_0, \dots, I_n$ sont deux à deux disjoints donc $\lambda(A_n) = \lambda(\cup_{0\leq k\leq n} I_k) = \sum_{k=0}^n \lambda(I_k)$. Par la question précédente : $\lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$.
   (d) Série géométrique : $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$.

2. Pour tout $\epsilon > 0$ (et $\epsilon < 1/2$), $\{1/2\} \subset [1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]$ donc

$$\begin{aligned}
\mu(\{1/2\}) &\leq \mu([1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]) \\
&= \int_{1/2-\epsilon}^{1/2+\epsilon} \mathbf{1}_{x\in[0,1]} \sin(x)dx \\
&= \int_{1/2-\epsilon}^{1/2+\epsilon} \sin(x)dx \\
&\leq \int_{1/2-\epsilon}^{1/2+\epsilon} 1dx \\
&\leq 2\epsilon\ .
\end{aligned}$$

   C'est vrai $\forall 0 < \epsilon < 1/2$ donc $\mu(\{1/2\}) = 0$.

3. (a) Pour tout $x \geq 1$, $\left|\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right| \leq \frac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{nx}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\frac{1}{nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et sin continue en 0. Donc, par théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)dx = \int_1^{+\infty} 0dx = 0$.
   (b) Pour tout $x \in [0,1]$, $(1-x/n)^n \leq 1$ qui est intégrable sur $[0,1]$. Pour tout $x \in]0,1]$, $(1-x/n)^n = \exp(n\log(1-x/n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$ car $n\log(1-x/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x$ et exp continue. On a donc convergence de $(1-x/n)^n$ vers e^{-x} pour presque tout $x \in [0,1]$. Donc, par théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-x/n)^n dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1-1/e$.
   (c) Pour tout $x \in [0,1]$, $|\exp(1+(\sin x)^n)| \leq \exp(2)$ qui est intégrable sur $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, $|\sin(x)| < 1$ donc $(\sin(x))^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc (puisque exp est continue en 0) $\exp(1+(\sin x)^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^1$. Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \exp(1+(\sin x)^n)\,dx = \int_0^1 e^1 dx = e\ .$$