UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
LEG2 - Probabilités et observations économique - 2005-2006 - 2ème semestre

Corrigé de l'interrogation n. 1 - mardi 7 mars 2005
Durée : 1h15mn
Documents interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.

Sujet A

Exercice 1 (a) On sait que la somme des probabilités dans le tableau doit faire 1 donc : $0.55 + a + b + c = 1$. On nous donne $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ donc :

$$1 = \mathbb{E}(X) = 0 \times (0.1 + 0.05 + 0.05) + 1 \times (a + b + 0.2) + 2 \times (0.05 + 0.1 + c)$$

et

$$0.85 = b + 0.15 + 2 \times (c + 0.25)$$

On résoud donc un système linéaire de trois équations à trois inconnues (je ne rédige pas cette partie) et on trouve $a = 0.3$, $b = 0.1$, $c = 0.05$.

(b) $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = b = 0.1$ et $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = (a+b+0.2)(0.05+b+0.1) = 0.15$ donc X, Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 2 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} a(x-1)^2 + a(x+1)^2 dx = [a(x-1)^3/3 + a(x+1)^3/3]_{-1}^{1} = 8a/3 + 8a/3 = 16a/3$ On veut que $f(x) \geq 0, \forall x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ donc il faut que $a = 3/16$.

Exercice 3 (a) On veut que F soit continue ce qui ammène les relations : $-a + b = 0$, $b = 1/3$, $c + 1/3 = 1$. D'où $a = 1/3$, $b = 1/3$, $c = 2/3$. On a déjà $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et donc avec ce choix de a, b, c, F est une fonction de répartition.

(b) $\mathbb{P}(-1/2 < X < 3/2) = F(3/2) - F(-1/2) = 1 - 1/6 = 5/6$.

(c) La densité f est la dérivée de F (aux points où cette dérivée existe) :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ 1/3 \text{ si } x \in]-1, 0[\\ 2/3 \text{ si } x \in]0, 1[\\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

(d) $F(1/4) = 1/2$ donc la médiane est $1/2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-1}^{0} x(1/3)dx + \int_{0}^{1} x(2/3)dx \\ &= [x^2/6]_{-1}^{0} + [x^2/3]_{0}^{1} \\ &= -1/6 + 1/3 \\ &= 1/6 \end{aligned}$$