Université de Nice - Sophia Antipolis
LEG2 - Probabilités et observations économique - 2005-2006 - 2ème semestre

Corrigé de l'interrogation n. 2

Durée : 1h15mn

Documents interdits.

La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.

Sujet A

Exercice 1 (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > 5) &= \int_5^{+\infty} \frac{e^{-x/5}}{5} dx \\
&= [e^{-x/5}]_5^{+\infty} \\
&= e^{-1} \approx 0.38
\end{aligned}$$

(b) Pour une fonction ϕ ($\in C_b^\infty$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(Z)) &= \mathbb{E}(\phi(T^3)) \\
&= \int_0^{+\infty} \phi(x^2) \frac{e^{-x/5}}{5} dx \\
\text{(changement de variable } u = x^3) \quad &= \int_0^{+\infty} \phi(u) \frac{e^{-u^{1/3}/5}}{5} \frac{1}{3} u^{-2/3} du
\end{aligned}$$

Donc la densité de Z est $g(u) = \phi(u) \frac{e^{-u^{1/3}/5}}{5} \frac{1}{3} u^{-2/3}$ si $u \geq 0$, $g(u) = 0$ sinon.

Exercice 2 (a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 1.1) &= 0.1 \\
\mathbb{P}(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{1.1-m}{\sigma}) &= 0.1
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{1.1-m}{\sigma}) = 0.9$. La variable $\frac{X-m}{\sigma}$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$ donc on lit sur la table : $\frac{1.1-m}{\sigma} \approx 1.29$. De même : $\mathbb{P}(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{0.9-m}{\sigma}) = 0.2 < 0.5$ donc $\frac{0.9-m}{\sigma} < 0$ donc $\mathbb{P}(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{0.9-m}{\sigma}) = 1 - \mathbb{P}(\frac{X-m}{\sigma} < -\frac{0.9-m}{\sigma})$ donc $\mathbb{P}(\frac{X-m}{\sigma} < -\frac{0.9-m}{\sigma}) = 0.8$ donc $-\frac{0.9-m}{\sigma} \approx 0.85$. D'où le système :

$$\begin{cases} 1.1 - m &= 1.2\sigma \\ -0.9 + m &= 0.85\sigma \end{cases}$$

Que l'on résoud pour trouver $\sigma \approx 0.094$, $m \approx 0.97$.

(b) On cherche r tel que $\mathbb{P}(m - r < X < m + r) = 0.9$. On veut donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{-r}{\sigma} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{-r}{\sigma}\right) &= 0.9 \\
\mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{r}{\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{-r}{\sigma}\right) &= 0.9 \\
\mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{r}{\sigma}\right) - \left[1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{r}{\sigma}\right)\right] &= 0.9 \\
\mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{r}{\sigma}\right) &= \frac{1+0.9}{2} = 0.95
\end{aligned}$$

Donc $\frac{r}{\sigma} \approx 1.65$. D'où $r \approx 0.16$.