UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 6
Calculs d'espérances. Calculs de lois.

1. On fait des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda x e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x\geq 0} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= [-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + [-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= 0 + \left[-2x\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= 0 + \left[-2\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue bornée.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(2X)) &= \int_0^{+\infty} f(2x)\lambda e^{-\lambda x} dx \\ \text{(changement de variable } t = 2x) &= \int_0^{+\infty} f(t)\lambda e^{-\lambda t/2} \frac{1}{2} dt\ .\end{aligned}$$

Cela est vrai $\forall f$ donc la densité de la loi de $2X$ est $x \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x/2}$.
Calculons : $E(2X) = 2\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda}$ (par linéarité de l'espérance) et $\mathrm{Var}(2X) = \mathbb{E}((2X)^2) - \mathbb{E}(2X)^2 = 4\mathbb{E}(X^2) - 4(\mathbb{E}(X))^2 = 4\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{\lambda^2}$ (par linéarité de l'espérance).

2. (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue bornée.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(\sigma U + m)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma x + m) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ \text{(changement de variable } t = \sigma x + m) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt\end{aligned}$$

Cela est vrai $\forall f$ donc la densité de la loi de $\sigma U + m$ est la même que celle de la loi de X donc $\sigma U + m$ et X ont même loi

(b) $E(X) = \mathbb{E}(\sigma U + m) = \sigma \mathbb{E}(U) + m = m$ (car $\mathbb{E}(U) = 0$ car intégrale de fonction impaire) et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(\sigma U + m) = \mathbb{E}((\sigma U + m)^2) - \mathbb{E}(\sigma U + m)^2 \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}(U^2) + m^2 + 2m\sigma \mathbb{E}(U) - m^2 = \sigma^2 \mathbb{E}(U^2) \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \\
&= \sigma^2 \left[-x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{+\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \\
&= 0 + \sigma^2 \, .
\end{aligned}$$

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue bornée.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(Y)) &= \mathbb{E}(f(aX + b)) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at + b) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, dt \\
\text{(changement de variable } x = at + b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 \sigma^2}} e^{-\frac{(x-b-m)^2}{2a^2\sigma^2}} \, dx
\end{aligned}$$

Cela est vrai $\forall f$ donc la densité de la loi de Y est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 \sigma^2}} e^{-\frac{(x-b-m)^2}{2a^2\sigma^2}}$.

(d) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b = am + b$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(aX + b) = \mathbb{E}((aX + b)^2) - \mathbb{E}(aX + b)^2 \\
&= a^2 \mathbb{E}(X^2) + b^2 + 2ab\mathbb{E}(X) - a^2 \mathbb{E}(X)^2 - b^2 - 2ab\mathbb{E}(X) \\
&= a^2 \mathbb{E}(X^2) - a^2 \mathbb{E}(X)^2 = a^2 \mathrm{Var}(X) = a^2 \sigma^2 \, .
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k \geq 0} k \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!} \\
&= \sum_{k \geq 1} \theta \frac{\theta^{k-1} e^{-\theta}}{(k-1)!} \\
&= \theta \sum_{q \geq 0} \frac{\theta^q emq^{-\theta}}{q!} \\
\text{(somme de série exponentielle)} &= \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-uX}) &= \sum_{k \geq 0} e^{-uk} \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!} \\
&= \sum_{k \geq 0} (e^{-u}\theta)^k \frac{e^{-\theta}}{k!} \\
\text{(somme de série exponentielle)} &= \exp(e^{-u}\theta)) e^{-\theta} \\
&= \exp(\theta(e^{-u} - 1))
\end{aligned}$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ continue bornée.

$$\mathbb{E}(f(X + 2Y, X - Y)) = \int_{R^2} f(x + 2y, x - y) \frac{3}{4} \exp\left(-|x + 2y| - |x - y|\right) dx dy$$

On fait un changement de variable en :

$$\left\{\begin{array}{l} u = x + 2y \\ v = x - y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{u+2v}{3} \\ y = \frac{u-v}{3} \end{array}\right. .$$

L'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\dfrac{u+2v}{3}, \dfrac{u-v}{3}\right) \end{array}$$

est bijective. On calcule le jacobien (c'est à dire que l'on écrit dans une matrice les dérivées partielles de ϕ en u et v) :

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

On fait le changement de variable dans l'intégrale :

$$\mathbb{E}(f(X+2Y, X-Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v) \frac{3e^{-|u|}e^{-|v|}}{4} |\det(J(u,v))| dudv = \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v) \frac{e^{-|u|}e^{-|v|}}{4} dudv \ .$$

Cela est vrai $\forall f$ donc la densité de la loi de $(X+2Y, X-Y)$ est $(u,v) \mapsto \frac{e^{-|u|}e^{-|v|}}{4}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue bornée.

$$\begin{array}{l} \mathbb{E}(f(X)) = \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{3}{4} \exp\left(-|x+2y| - |x-y|\right) dxdy = \\ \text{(Fubini-Tonelli)} \\ \displaystyle\frac{3}{4} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-|x+2y| - |x-y|\right) dy \right) dx \end{array}$$

On veut calculer $\psi(x) := \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-|x+2y| - |x-y|\right) dy$. Commençons par montrer que c'est une fonction paire. On fait un changement de variable en $t = -y$ dans l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \psi(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-|-x+2y| - |-x-y|\right) dy &= \int_{+\infty}^{-\infty} \exp\left(-|-x-2t| - |-x+t|\right)(-1)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-|x+2t| - |x-t|\right) dt = \psi(x) \ . \end{aligned}$$

On se contente donc de calculer $\psi(x)$ pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{-\infty}^{-x/2} e^{(x+2y)} e^{-(x-y)} dy + \int_{-x/2}^{x} e^{-(x+2y)} e^{-(x-y)} dy + \int_{x}^{+\infty} e^{-(x+2y)} e^{(x-y)} dy \\ &= \frac{e^{-3x/2}}{3} + e^{-3x/2} - e^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{3} \\ &= \frac{4e^{-3x/2}}{3} - \frac{2}{3} e^{-3x} \ . \end{aligned}$$

Donc par parité, $\psi(x) = \frac{4e^{-3|x|/2}}{3} - \frac{2}{3} e^{-3|x|}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{3}{4} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\frac{4e^{-3|x|/2}}{3} + e^{-5|x|/2} - \frac{2}{3} e^{-3|x|} \right) \ .$$

Cela est vrai $\forall f$ donc la densité de la loi de X est $x \mapsto e^{-3|x|/2} - \frac{e^{-3|x|}}{2}$.
Des calculs analogues conduisent à la densité suivante pour Y : $y \mapsto \frac{3}{4} e^{-3|y|}(1 + 3|y|)$.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue bornée.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(1/Y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(1/x)\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(1/x)\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx + \int_{0}^{+\infty} f(1/x)\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx \\
\text{(changement de variable en } u = 1/x) &= \int_{0}^{-\infty} f(u)\frac{1}{\pi(1+1/u^2)}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du \\
\text{(changement de variable en } v = 1/x) & \quad + \int_{+\infty}^{0} f(v)\frac{1}{\pi(1+1/v^2)}\left(-\frac{1}{v^2}\right)dv \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(u)\frac{1}{\pi(1+u^2)}du + \int_{0}^{+\infty} f(v)\frac{1}{\pi(1+v^2)}dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{1}{\pi(1+u^2)}du
\end{aligned}
$$

(Remarque : on est obligé de découper l'intégrale en deux morceaux pour faire des changements de variables bien définis.) On a donc que $u \mapsto \frac{1}{\pi(1+u^2)}$ est la densité de $1/Y$.