

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 8

1. (a)

$$\begin{aligned} F(t) = \mathbb{P}(\sup(U, X) \leq t) &= \mathbb{P}(U \leq t, X \leq t) \\ \text{(indépendance)} &= \mathbb{P}(U \leq t)\mathbb{P}(X \leq t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t(1 - e^{-t}) & \text{si } t \in]0, 1[\\ 1 - e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) On remarque que F est continue et qu'elle a un point anguleux en 1.

2. (a)

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| &\leq \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X)|) \\ &\leq C\mathbb{E}(\inf(1, |X_n - X|)) \end{aligned}$$

Pour p.t. ω , $\inf(1, |X_n(\omega) - X(\omega)|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\forall \omega$, $\inf(1, |X_n(\omega) - X(\omega)|) \leq 1$. Donc par théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(\inf(1, |X_n - X|)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc $|\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

(b) $\mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X)|)$ (inégalité de Bienaymé-Tchebycheff)

3. (a)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \sum_{n \geq 0} n \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 1} n \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \\ &= (\lambda T) e^{-\lambda T} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \\ &= \lambda T \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \geq m + p) &= \mathbb{P}(\text{on a grillé plus de } m + p \text{ ampoules dans } [0, T]) \\ &= \mathbb{P}(\text{les } m + p \text{ premières ampoules ont déjà grillé quand on arrive en } T) \\ &= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{m+p} < T) \end{aligned}$$

(c) On remarque que $\text{Var}(X_1) = 1/\lambda^2$, $\mathbb{E}(X_1) = 1/\lambda$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \geq m + p) &= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{m+p} \leq T) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - \mathbb{E}(X_1) + \dots + X_{m+p} - \mathbb{E}(X_{m+p})}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}} < \frac{T - (m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}}\right) \\ \text{(TCL)} &\approx \int_{-\infty}^{\frac{T - (m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt. \end{aligned}$$

On calcule $\frac{T-(m-1+p)/\lambda}{(1/\lambda)\sqrt{m-1+p}} = -1$. On a par parité :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\ &= 1 - \int_{-\infty}^1 \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\ \text{(d'après la table)} &= 1 - 0,8413 = 0.1587 . \end{aligned}$$

(d) Ici, on cherche p pour que $\mathbb{P}(N \geq m+p) \leq 0.05$. Comme avant :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \geq m+p) &\underset{\text{TCL}}{\approx} \int_{-\infty}^{\frac{T-(m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{-\frac{T-(m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt . \end{aligned}$$

On regarde la table et on voit qu'il faut prendre $-\frac{T-(m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}} \geq 1.65$. Une rapide étude de fonction montre qu'il faut prendre $m+p \geq 29$.