UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Feuille d'exercices numéro 9

1. Soient $1 \leq p \leq q$. Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r.). En utilisant l'inégalité de Jensen (pour la fonction $t \mapsto |t|^{q/p}$), montrer que $\mathbb{E}(|X|^p)^{1/p} \leq \mathbb{E}(|X|^q)^{1/q}$. (Remarque : donc la convergence L^q implique la convergence L^p.)

2. Soient $X_1, X_2, \dots$ indépendants et de même loi $\mathcal{B}(p)$ $(0 < p < 1)$. On rappelle que $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ est de loi $\mathcal{B}(n,p)$ et que $\mathbb{E}(X_1) = p$ $\mathrm{Var}(X_1) = p(1-p)$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $a_n = (\sqrt{p(1-p)n})a + np$, $b_n = (\sqrt{p(1-p)n})b + np$. En utilisant le théorème central-limite, montrer que
$$\sum_{k \in \mathbb{N}, a_n \leq k \leq \inf(b_n, n)} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

3. Soit X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Soient $t_1, t_2 > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X > t_1 + t_2 | X > t_1) = \mathbb{P}(X > t_2)$.