

Travaux pratiques numéro 1

1. On s'intéresse à

$$I = \int_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{(x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 < 1/4} dx dy .$$

- (a) Estimer I à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo. On note I_N le résultat pour N boucles.
 - (b) Faire un graphique avec des estimées de $\mathbb{E}(|I_N - I|)$ pour différentes valeurs de N .
 - (c) Estimer la variance de la méthode choisie en 1a.
 - (d) Réduire la variance par la méthode que l'on voudra. Estimer la nouvelle variance.
2. (a) Proposer une méthode de fonction d'importance pour le calcul de :

$$I = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\xi > 0} e^{\beta \xi})$$

où $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\beta = 5$.

- (b) Proposer une méthode de variable de contrôle de la même intégrale.
 - (c) Améliorer votre estimateur à l'aide d'une technique de variables antithétiques (comparer les variances empiriques).
3. On considère un vecteur gaussien (G_1, G_2) où G_1 et G_2 sont de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et telles que $\text{Cov}(G_1, G_2) = \rho$ avec $-1 < \rho < 1$. Le but de ce TP est de comparer diverses méthodes de réduction de variance pour le calcul de

$$I = \mathbb{E}((C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2} - K)_+) .$$

Les constantes sont les suivantes $C_1 = 1, C_2 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, 2, K = 1, \rho = 1/2$.

- (a) Soient g_1 et g_2 de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, *indépendantes*. Trouver des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ telles que $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) \stackrel{\text{loi}}{=} (G_1, G_2)$. En déduire une méthode de simulation de (G_1, G_2) .
- (b) On veut calculer I par une méthode de Monte-Carlo simple. Écrire un programme qui calcule la variance de cette méthode. Combien d'itérations faut-il effectuer dans la méthode de Monte-Carlo pour avoir un résultat I_n qui approche I à 0.1 près avec 95% de chances ? Écrire un programme qui calcule I à 0.1 près avec 95% de chances.
- (c) Calculer (pour de vrai, à la main) $\mathbb{E}(e^{\sigma_1 G_1 + \sigma_2 G_2})$ pour σ_1 et σ_2 deux nombres réels.
- (d) Expliciter $\mathbb{E}(C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2})$ et proposer une technique de variable de contrôle visant à réduire la variance de la méthode de Monte-Carlo. Écrire un programme qui calcule les variances. La variance a-t-elle été réduite ?
- (e) Proposer une méthode de fonction d'importance pour réduire la variance. Programmer cette méthode et comparer les variances.