UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007
Sylvain Rubenthaler

CORRIGÉ de l'examen - lundi 8 janvier 2007

Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. (a) Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 0$, $|\frac{1+n\sin(\frac{x}{n})}{\sqrt{x}}| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable sur $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, $n\sin(\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$. Donc par théorème de convergence dominée, la limite cherchée est $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}}dx$.

   (b) Pour tout $x \geq 0$, tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{1+x^2}$ qui est une fonction intégrable sur $[0,+\infty)$. Pour tout $x > 0$ (et donc p.s. en $x \geq 0$), $\frac{1}{(1+x^2)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par théorème de convergence dominée, la limite cherchée est 0.

2. (a) Soit f fonction continue bornée positive $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(U,V)) &= \mathbb{E}(f(X/Y,XY)) \\ &= \int_{x\geq 0,y\geq 0} f\left(\frac{x}{y},xy\right)\frac{8}{\pi^2}\frac{xy}{x^2(1+(xy)^2)+y^2+x^2y^4}dxdy\end{aligned}$$

   Changement de variable : $u = x/y, v = xy$, $x = \sqrt{uv}, y = \sqrt{v/u}$. Matrice jacobienne :

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{v}}{u^{3/2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} \end{bmatrix}$$

   Quand (x,y) parcourt $[0,+\infty)^2$, (u,v) parcourt $[0,+\infty)^2$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(U,V)) &= \int_{u\geq 0,v\geq 0} f(u,v)\frac{8}{\pi^2}\frac{v}{\left(uv(1+v^2)+\frac{v}{u}+v^2\times\frac{v}{u}\right)}\frac{1}{2u}dudv \\ &= \int_{u\geq 0,v\geq 0} f(u,v)\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{u^2(1+v^2)+1+v^2}dudv\end{aligned}$$

   Donc la densité de (U,V) est $(u,v) \mapsto \mathbf{1}_{u\geq 0,v\geq 0}\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{u^2(1+v^2)^2+1+v^2}$.

   (b) Soit f fonction continue bornée positive $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Par Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(V)) &= \int_{u\geq 0,v\geq 0} f(v)\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{u^2(1+v^2)+1+v^2}dudv \\ &= \int_{v\geq 0} f(v)\int_{u\geq 0}\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{u^2(1+v^2)+1+v^2}dudv \\ &= \int_{v\geq 0} f(v)\left[\frac{4}{\pi^2}\arctan(u)\frac{1}{(1+v^2)}\right]_0^{+\infty} \\ &= \int_{v\geq 0} f(v)\frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+v^2)}dv\end{aligned}$$

   Donc la densité de V est $v \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{v\geq 0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+v^2)}$.

3. (a) ...

   (b) Par Fubini-Tonelli et parce que X et Z sont indépendantes (donc la densité du couple est le produit des densités)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Z) &= \int_{x \geq 0, z \geq 0} \mathbf{1}_{x<z} e^{-x-z} dx dz \\
&= \int_{z \geq 0} e^{-z} \int_0^z e^{-x} dx dz \\
&= \int_{z \geq 0} e^{-z}(1 - e^{-z}) dz \\
&= 1 - 1/2 = 1/2.
\end{aligned}$$

   Les variables X, Y, Z sont indépendantes et de même loi donc (X, Z) a même loi que (Y, Z) donc $\mathbb{P}(X \leq Z) = \mathbb{P}(Y \leq Z)$. D'où $\mathbb{P}(\sup(X, Y) \geq Z) = 1 - 1/4 = 3/4$.

4. X et Y sont indépendantes donc la densité du couple (X, Y) est le produit des densités.

   (a) Par Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 3, X - Y \geq 1) &= \int_{x \geq 0, 0 \leq y \leq 1} \mathbf{1}_{x \geq 3} \mathbf{1}_{x \geq y+1} e^{-x} dx \\
&= \int_{x \geq 0, 0 \leq y \leq 1} \mathbf{1}_{x \geq 3} e^{-x} dx \\
&= \int_{0 \leq y \leq 1} \int_{x \geq 3} e^{-x} dx \\
&= \int_{0 \leq y \leq 1} e^{-3} dx = e^{-3}
\end{aligned}$$

   (b) Par Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X - Y \geq 1) &= \int_{x \geq 0, 0 \leq y \leq 1} \mathbf{1}_{x \geq y+1} e^{-x} dx \\
&= \int_{0 \leq y \leq 1} \int_{x \geq y+1} e^{-x} dx \\
&= \int_{0 \leq y \leq 1} e^{-y-1} dy \\
&= e^{-1}(1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2}
\end{aligned}$$

   (c) Donc $\mathbb{P}(X \geq 3 | X - Y \geq 1) = \mathbb{P}(X \geq 3, X - Y \geq 1)/\mathbb{P}(X - Y \geq 1) = e^{-3}/(e^{-1} - e^{-2}) \geq e^{-3} = \mathbb{P}(X \geq 3)$.

5. (a) $\mathbb{E}(U_1) = 1/2$, $\mathbb{E}(U_1^2) = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$ donc $\mathrm{Var}(U_1) = 1/3 - 1/4 = 1/12$.

   (b) Soit Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Par théorème central-limite et d'après la table jointe au sujet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_n \leq k) &= \mathbb{P}\left(\frac{U_1 + \cdots + U_n - n\mathbb{E}(U_1)}{\sqrt{n\mathrm{Var}(U_1)}} \leq \frac{k - n\mathbb{E}(U_1)}{\sqrt{n\mathrm{Var}(U_1)}}\right) \\
&\approx \mathbb{P}(Z \leq -1) = \mathbb{P}(Z \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Z \geq 1) \approx 0.1587
\end{aligned}$$

   (c) Il suffit d'avoir $\frac{k - m\mathbb{E}(U_1)}{\sqrt{m\mathrm{Var}(U_1)}} = 1.29$. On prend alors m la partie entière de la solution positive de l'équation en x suivante $(k - x\mathbb{E}(U_1))^2 = 1.29^2 \times x\mathrm{Var}(U_1)$.