UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007
Sylvain Rubenthaler

Examen - lundi 8 janvier 2007
Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. Calculer les limites suivantes.
   (a) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1+n\sin(\frac{x}{n})}{\sqrt{x}}dx$ (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale limite)
   (b) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx$ (on calculera cette fois la valeur de l'intégrale limite).
2. Soit (X,Y) couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité
$$(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \frac{8}{\pi^2}\frac{xy}{x^2(1+(xy)^2)+y^2+x^2y^4}\mathbf{1}_{x\geq 0,y\geq 0}.$$
   (a) Calculer la loi de $(U,V)=(X/Y,XY)$.
   (b) Calculer la loi de V.
3. Soient X,Y,Z trois variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de densité
$$x\in\mathbb{R}\mapsto \mathbf{1}_{x\geq 0}e^{-x}$$
   (c'est la densité de la loi exponentielle de paramètre 1).
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(\sup(X,Y)\geq Z)=1-\mathbb{P}(X\leq Z)\mathbb{P}(Y\leq Z)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(\sup(X,Y)\geq Z)$.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes X de loi exponentielle de paramètre 1 et Y de loi uniforme sur $[0,1]$ (cf. les autres exercices pour les densités de ces lois).
   (a) Calculer $\mathbb{P}(X\geq 3, X-Y\geq 1)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X-Y\geq 1)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(X\geq 3|X-Y\geq 1)$. Cette probabilité est-elle plus petite ou plus grande que $\mathbb{P}(X\geq 3)$?
5. Soient $U_1,\dots,U_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$ (et donc de densité $t\in\mathbb{R}\mapsto \mathbf{1}_{t\in[0,1]}$).
   (a) Calculer $\mathbb{E}(U_1)$, $\mathrm{Var}(U_1)$.
   (b) Soient $n=48, k=22$. Donner une approximation de $\mathbb{P}(U_1+\dots+U_n\leq k)$.
   (c) Trouver un $m\in\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(U_1+\dots+U_m\leq k)\leq 0.1$ (on pourra se contenter d'écrire m comme solution d'une équation).