UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007
Sylvain Rubenthaler

Corrigé du partiel - lundi 20 novembre 2006

Durée : 2h.

La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.

1. (a) $(1+\frac{x}{n})^n = \exp(n\log(1+\frac{x}{n}))$ et $\forall x \in]0,1]$, $n\log(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{x}{n} = x$ donc, puisque exp est continue, $\exp(n\log(1+\frac{x}{n})) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x$ ($\forall x \in]0,1]$). Donc $\exp(n\log(1+\frac{x}{n})) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x$ pour presque tout x de $[0,1]$. Pour tout x de $]0,1]$ (et donc pour presque tout x de $[0,1]$), $\log(1+\frac{x}{n})) \leq \frac{x}{n}$ donc $\exp(n\log(1+\frac{x}{n})) \leq e^x$ qui est une fonction intégrable sur $[0,1]$. Donc par théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - 1 \ .$$

   (b) $\forall x \in]0;1]$, $\frac{n}{x\sqrt{x}}\sin\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{x\sqrt{x}}\frac{x}{n} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc pour presque tout x de $[0,1]$,

$$\frac{n}{x\sqrt{x}}\left(\sin\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

   On a par ailleurs, $\forall x > 0$ (et donc pour presque tout x de $[0,1]$), $\left|\frac{n}{x\sqrt{x}}\left(\sin\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{n}{x\sqrt{x}}(|\sin\left(\frac{x}{n}\right)| + |\frac{x}{n}|) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable sur $[0,1]$. Donc par théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{n}{x\sqrt{x}}\left(\sin\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right) dx = 0 \ .$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 2e^{-2x} dx \\
&= [-x^2e^{-2x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-2x} dx \\
&= [-xe^{-2x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \\
&= [-e^{-2x}/2]_0^{+\infty} \\
&= 1/2
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x > 0$ (et donc pour presque tout x de $[0,\pi/2]$), $y \mapsto (y/x)\sin(yx)$ est dérivable de de dérivée $\frac{1}{x}\sin(yx) + y\cos(yx)$. Pour tout $y \in [0,1]$, $|\frac{1}{x}\sin(yx) + y\cos(yx)| \leq \frac{yx}{x} + y \leq 2$ qui est intégrable sur $[0,1]$. Pour tout $y \in [0,1]$, $x \mapsto \frac{y}{x}\sin(yx)$ est intégrable sur $[0,1]$ (car $|\frac{y}{x}\sin(yx)| \leq y^2$. Donc, par théorème de dérivation globale sous l'intégrale,

$$F'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(yx)}{x} + y\cos(yx) dx \ .$$

4. (a) Par indépendance des X_i : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\dots\mathbb{P}(X_n = 1) = (1/2)^n$.

(b) $\mathbb{P}(A_0) \leq 1$ donc par intersection décroissante : $\mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

5. (a) On prend $f \in C_b^+((\mathbb{R}_+^*)^2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(U,V)) &= \mathbb{E}(f(\sqrt{XY}, \sqrt{X/Y})) \\
&= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f(\sqrt{xy}, \sqrt{x/y})(x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = \sqrt{xy}, v = \sqrt{x/y}$. On a $x = uv$, $y = u/v$. La matrice jacobienne est la suivante :

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} v & 1/v \\ u & -u/v^2 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\mathbb{E}(f(U,V)) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f(u,v)e^{-uv}e^{-u/v}\left(uv + \frac{u}{v}\right)\left|\frac{-2u}{v}\right| dudv$$

Donc la densité de (U,V) est la fonction $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto e^{-uv}e^{-u/v}2u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)$.

(b) La variable V est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit $f \in C_b^+(\mathbb{R}_+^*)$. Par Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(V)) &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f(v)e^{-uv}e^{-u/v}2u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)dudv \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} f(v)\left(\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-u/v}2u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)du\right)dv
\end{aligned}$$

Donc la densité de V est $v \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-uv}e^{-u/v}2u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)du$ que l'on calcule par intégrations par parties (en posant $\alpha = (v+\frac{1}{v})$) :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-uv}e^{-u/v}2u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)du &= \left(1+\frac{1}{v^2}\right)\left(\left[-\frac{2u^2}{\alpha}e^{-u\alpha}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{4u}{\alpha}e^{-\alpha u}du\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{v^2}\right)\left(\left[-\frac{4u}{\alpha^2}e^{-\alpha u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{4}{\alpha^2}e^{-\alpha u}du\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{v^2}\right)\frac{4}{\alpha^3} = \frac{4v(v^2+1)}{(v^2+1)^3}
\end{aligned}$$