

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 1

1. (a) $f([-3, -1]) = [1, 9]$, $f([-3, 1]) = [0, 9]$, $f(]-3, 1]) = [0, 9[$.
 (b) $f^{-1}(]-\infty, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $f^{-1}(]1, +\infty[) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f^{-1}(]-1, 0] \cup [1, 2]) = \{0\} \cup]-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}[$.
2. (a) $\frac{\sin(x)}{\log(1+x)} \underset{x \rightarrow 0+}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \underset{x \rightarrow 0+}{\rightarrow} 1$
 (b) $(1 + \frac{2}{x})^x = e^{x \log(1 + \frac{2}{x})}$ et $x \log(1 + \frac{2}{x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 2$ donc par continuité de la fonction exp : $(1 + \frac{2}{x})^x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} e^2$
 (c) $\frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)} = \frac{(x^2/2) + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2x^2} = 1/2$
 (d) $\frac{1 - (1+x)^\alpha}{1 - (1+x)^\beta} = \frac{\alpha x + o(x)}{\beta x + o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$
- (a) on intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx &= [-x^2 e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x} dx \\ &= 0 + [-2x e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x} dx \\ &= [-2e^{-x}]_0^{+\infty} = 2 \end{aligned}$$

- (b) changement de variable : $t = \log(z)$, $z = e^t$, $dz = e^t dt$

$$\begin{aligned} \int_{e^1}^{+\infty} \frac{1}{(\log(z))^2 z} dz &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \\ &= [-1/t]_1^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

- (c) on décompose $\frac{1}{(2-x)(1+x)} = \frac{1/3}{2-x} + \frac{1/3}{1+x}$ (toujours possible pour une fraction rationnelle à pôles simples) et donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)} dx = \left[-\frac{1}{3} \log(2-x) + \frac{1}{3} \log(1+x) \right]_0^1 = \frac{1}{3} \log(4)$$

- (d) changement de variable : $t = \tan(x)$, $x = \arctan(t)$, $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} dx &= \int_0^{\pi/4} 1 + \tan^2(x) dx \\ &= [\tan(x)]_0^{\pi/4} = 1 \end{aligned}$$

3. (a) $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$.

(b) On intègre par parties pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x) \sin(x) dx \\ &= [-\sin^{n+1}(x) \cos(x)]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \cos^2(x) dx \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

d'où $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

(c) Démonstration par récurrence de la formule pour I_{2p} (démonstration similaire pour I_{2p+1}) :

• c'est vrai en $p = 0$

• si c'est vrai jusqu'au rang p alors $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{(2p+1)(2p-1)\dots 1}{(2p+2)(2p)\dots 2} \frac{\pi}{2}$

(d) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2], 0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x)$ donc par intégration $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$, donc $1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$, donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$

(e) on déduit de la question précédente : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \right]^2 (2p+1) = 1$, d'où la formule de Wallis

(f) On fait la démonstration pour n impair . Soit $n = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)\dots 1} \\ &= \frac{\sqrt{p}}{2p+1} \sqrt{\frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p+2)\dots 2}{(2p-1)\dots 1} \right)^2} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(2p+1)}} \sqrt{\pi} . \end{aligned}$$