UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Feuille d'exercices numéro 1

1. Rappel : Si $f : E \to F$ et $A \subset F$, $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}$. Si $C \subset E$, $f(C) = \{f(x), x \in C\}$.
   On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
   (a) Déterminer $f([-3,-1])$, $f([-3,1])$, $f(]-3,1])$.
   (b) Déterminer $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}(]1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-1,0] \cup [1,2[)$.
2. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{\log(1+x)}$
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}$
   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-(1+x)^\alpha}{1-(1+x)^\beta}$ pour $\alpha, \beta > 0$.
3. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$
   (b) $\int_{e^1}^{+\infty} \frac{1}{(\log(z))^2 z} dz$
   (c) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)} dx$
   (d) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} dx$.
4. Intégrales de Wallis
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
   $$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx \ .$$
   (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
   (c) En déduire que :
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1} \ .$$
   (d) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$. En déduire que $\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$.
   (e) En déduire la formule de Wallis :
   $$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}\right]^2 = \pi \ .$$
   (f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.