UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 10

1. (a) On a $\frac{\partial}{\partial x}(-e^{-\frac{x^2}{2}}) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y>\delta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\delta^{+\infty}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(-e^{-\frac{x^2}{2}})dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_\delta^\infty - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\delta^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &\leq \frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2}}.\end{aligned}$$

(b) Par la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y>\delta) &= \int_\delta^\infty y\left(\frac{1}{y}\frac{e-\frac{y^2}{2}}{\sqrt{2\pi}}\right)dy \\ &\leq \int_\delta^\infty y\times\mathbb{P}(Y>y)dy \\ &= \delta\int_\delta^{+\infty}F(y)dy\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_\delta^{+\infty}1\times F(y)dy &= [yF(y)]_\delta^\infty + \int_\delta^\infty y\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\ &= -\delta F(\delta) + \left[-\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right]_\delta^\infty \\ &= -\delta\int_\delta^\infty\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx + \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

(d) D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y>\delta) &\geq -\delta^2\mathbb{P}(Y>\delta) + \delta\frac{e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\ \mathbb{P}(Y>\delta) &\geq \frac{\delta}{1+\delta^2}\frac{e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ .\end{aligned}$$

2. (a) $S_n \sim \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$ donc $\sqrt{n}\left(\frac{S_n-m}{\sigma}\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(b) Par symétrie et par les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(m-\delta\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq S_n \leq m+\delta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\sqrt{n}\left(\frac{S_n-m}{\sigma}\right)\right| \leq \delta\right) \\ &= 1-2\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{S_n-m}{\sigma}\right) > \delta\right) \\ &\geq 1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

(c) Avec $\delta = \sqrt{n}\epsilon/\delta$, on a (par la question précédente) :

$$\mathbb{P}(m - \epsilon \leq S_n \leq m + \epsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\frac{\sigma}{\epsilon}\exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2\sigma^2}\right).$$

(d) À l'aide d'une calculatrice, on trouve :

$$\mathbb{P}(|S_n - m| \leq \epsilon) \geq 0.8920 \ .$$