

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 2

1. (a) $\bigcap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)] = \emptyset$ car $1 \notin \bigcap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$ et $\forall x \neq 1, \exists n$ tel que $x \notin]1, 1 + 1/(n+1)]$ et donc $x \notin \bigcap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$
 - (b) $\bigcap_{n \geq 0}]1, 2 + 1/(n+1)] =]1, 2]$
 - (c) $\bigcap_{n \geq 0}]1 - 1/(n+1), 2] = [1, 2]$
 - (d) $\bigcup_{n \geq 0} [1/(n+1), +\infty[=]0, +\infty[$ donc $f^{-1}(\bigcup_{n \geq 0} [1/(n+1), +\infty[) = f^{-1}(]0, +\infty[) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$
2. (a) Soient $k \neq n, k < n$. $A_k \subset A_{n-1}$ donc $\forall x \in A_k, x \notin B_n$. Comme $B_k \subset A_k$, alors $B_k \cap B_n = \emptyset$
 - (b)
 - Si $x \in (\bigcap_{n \geq 0} A_n)^c$ alors $x \notin \bigcap_{n \geq 0} A_n$ donc $\exists n$ tel que $x \notin A_n$. Donc $\exists n$ tel que $x \in A_n^c$.
Donc $x \in \bigcup_{n \geq 0} A_n^c$.
 - Si $x \in \bigcup_{n \geq 0} A_n^c$ alors $\exists n$ tel que $x \notin A_n$. Donc $x \notin \bigcap_{n \geq 0} A_n$. Donc $x \in (\bigcap_{n \geq 0} A_n)^c$.
 Conclusion : $\bigcup_{n \geq 0} A_n^c = (\bigcap_{n \geq 0} A_n)^c$.
 - (c) Par passage au complémentaire dans le résultat précédent : $(\bigcup_{n \geq 0} A_n^c)^c = \bigcap_{n \geq 0} A_n$.
3. On rappelle que " A_1, \dots, A_n partition de \mathbb{R} " signifie que les ensembles A_i sont 2 à 2 disjoints et que $A_1 \cup \dots \cup A_n = \mathbb{R}$.
 - (i) $\mathbb{R} = A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$
 - (ii) Soit $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \notin I} A_i \in \mathcal{A}$.
 - (iii) Si on fait une réunion dénombrable d'éléments de \mathcal{A} : $\bigcup_{n \geq 0} (\bigcup_{i \in I_n} A_i) = \bigcup_{i \in \bigcup_{n \geq 0} I_n} A_i \in \mathcal{A}$.
4. Fait en cours
 5. (a) Remarque : δ_x s'appelle la mesure de Dirac en x .
 - (i) δ_x est bien une fonction de \mathcal{A} dans $[0, +\infty]$
 - (ii) $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \notin \emptyset$
 - (iii) Si on a des éléments 2 à 2 disjoints de \mathcal{A} : A_0, A_1, \dots

$$\delta_x\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in \bigcup_{n \geq 0} A_n \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} = 1 & \text{si } \exists n \text{ tel que } x \in A_n \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \delta_x(A_n)$$

car les A_n sont 2 à 2 disjoints (et donc au plus un seul d'entre eux contient x , c'est à dire au plus un seul d'entre eux est tel que $\delta_x(A_n) = 1$).

(b) On remarque que $\forall i, \delta_{x_i}$ est une mesure par la question précédente.

(i) μ est bien une fonction de \mathcal{A} dans $[0, +\infty]$

(ii) $\mu(\emptyset) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(\emptyset) = 0$

(iii) Si on a des éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{A} : A_0, A_1, \dots :$

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \sum_{n \geq 0} \delta_{x_i}(A_n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(A_n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) . \end{aligned}$$