

Feuille d'exercices numéro 2

1. Rappel : Pour une famille d'ensemble $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on note $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \{x : \forall n, x \in A_n\}$ et $\bigcup_{n \geq 0} A_n = \{x : \exists n \text{ tel que } x \in A_n\}$
 - (a) Déterminer $\bigcap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n + 1)]$.
 - (b) Déterminer $\bigcap_{n \geq 0}]1, 2 + 1/(n + 1)]$.
 - (c) Déterminer $\bigcap_{n \geq 0}]1 - 1/(n + 1), 2]$.
 - (d) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\bigcup_{n \geq 0}]1/(n + 1), +\infty[)$.
2. Soit Ω un ensemble et soient A_0, A_1, \dots des parties de Ω .
 - (a) On suppose dans cette question que $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$. Posons pour tout $n \geq 1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ (rappel : $A \setminus C = \{x \in A : x \notin C\}$). Montrer que les ensembles B_n sont deux à deux disjoints.
 - (b) On note : $\forall A \subset \Omega, A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$. Montrer que $\bigcup_{n \geq 0} A_n^c = (\bigcap_{n \geq 0} A_n)^c$.
 - (c) Montrer que $(\bigcup_{n \geq 0} A_n^c)^c = \bigcap_{n \geq 0} A_n$.
3. Soit A_1, \dots, A_n une partition de \mathbb{R} . Montrer que $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i \in I} A_i : I \subset \{1, \dots, n\}\}$ est une tribu. (\mathcal{A} est constitué de toutes les réunions possibles d'ensembles A_i .)
4. Soit

$$\begin{aligned} \text{Card} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\rightarrow [0, +\infty] \\ A &\mapsto \text{Card}(A) = \text{le nombre d'éléments de } A . \end{aligned}$$

Montrer que Card est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

5. On se donne un espace mesurable (E, \mathcal{A}) .

- (a) Soit $x \in E$, on note

$$\begin{aligned} \delta_x : \mathcal{A} &\rightarrow [0, +\infty] \\ B &\mapsto \delta_x(B) \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in B \\ = 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que δ_x est une mesure sur (E, \mathcal{A}) .

- (b) Soient x_1, \dots, x_k des éléments distincts de E et $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}_+^*$. On note

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\rightarrow [0, +\infty] \\ B &\mapsto \mu(B) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(B) \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure sur (E, \mathcal{A}) .