

Feuille d'exercices numéro 3

On note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . On rappelle que λ (en tant que mesure) vérifie les propriétés suivantes :

- Croissance : si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $A \subset B$ alors $\lambda(A) \leq \lambda(B)$, si, de plus, $\lambda(A) < +\infty$, alors $\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A)$.
- Additivité : si $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont deux à deux disjoints alors $\lambda(\cup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n \geq 0} \lambda(A_n)$.
- Sous-additivité : si $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors $\lambda(\cup_{n \geq 0} A_n) \leq \sum_{n \geq 0} \lambda(A_n)$.

1. Soit $A = \cup_{n \geq 0} [n, n + \frac{1}{2^n}[$. Calculer $\lambda(A)$. (On se servira du fait que A est réunion d'ensembles disjoints et on utilisera la propriété d'additivité.)

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lambda(\{x\})$ (utiliser la propriété de croissance).

(b) Soit $x_0, x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$, calculer $\lambda(\cup_{n \geq 0} \{x_n\})$ (utiliser la propriété de sous-additivité).

(c) En déduire que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Calculer $\lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$.

3. Un ensemble de Cantor.

Pour $n \geq 1$, on note :

$A_n = \{x \in [0, 1[, x \text{ n'a que des } 1 \text{ ou des } 5 \text{ dans son développement décimal jusqu'à l'ordre } n\}$.

A_n est donc l'ensemble des $x \in [0, 1[$ qui s'écrivent $x = 0, u_1 u_2 \dots u_n u_{n+1} \dots$ avec $u_1, \dots, u_n \in \{1, 5\}$.

(a) Calculer $\lambda(A_n)$ pour tout n .

(b) Soit $B = \cap_{n \geq 1} A_n$, calculer $\lambda(B)$ (utiliser la propriété d'intersection décroissante).

4. Mesures à densité.

(a) Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu([0, 1]), \mu([0, 2]), \mu([0, 1/2]), \mu(\{1/2\})$.

(b) Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbf{1}_{x>0} e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu(\mathbb{R}), \mu(\{1\}), \mu([0, 1]), \mu([1, +\infty[)$.

(c) Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbf{1}_{x>0} x e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu([0, 1])$.