UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 5
Intégrales à paramètre, intégrales multiples.

1. (a) $0 \leq 1 - e^{-z} = \int_0^z e^{-t}dt \leq \int_0^z 1dt = z$

   (b) Par la question précdente, $\forall y > 0$, $0 \leq \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2} \leq y$ et $\leq \frac{1}{x^2}$ donc $0 \leq \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2} \leq \inf(1, 1/x^2)$ donc $x \mapsto \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}$ est intégrable

   (c) Soit $\epsilon > 0$,
   - $\forall y > \epsilon$, $x \mapsto \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}$ est intégrable
   - $\forall x > 0$ (et donc pour presque tout $x \geq 0$), $y \mapsto \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}$ est dérivable
   - $\forall x > 0$, $\forall y > \epsilon$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}\right) = e^{-x^2y}$ et $|e^{-x^2y}| \leq e^{-\epsilon x^2}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$

   Donc (théorème de dérivation globale) F est dérivable sur $]\epsilon, +\infty[$ et F' vaut:

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2y}dx$$

   Cela est vrai $\forall \epsilon > 0$ donc cette dérivée est valable pour tout $y \in]0, +\infty[$. Par changement de variable ($u = \sqrt{y}x$), $F'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}$.

   (d) On en déduit $F(y) = \sqrt{\pi y} + C$ pour une certaine constante C.

   (e) $F(1/n) = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ avec $f_n(x) = \frac{1-e^{-x^2/n}}{x^2}$. Pour tout $x > 0$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leq \inf(1, 1/x^2)$ (voir question 1). Donc, par théorème de convergence dominée :

$$F(1/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   donc $C = 0$.

2. (a)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dx &= \frac{1}{(1+y)}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\arctan(x\sqrt{y})\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)} .\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dxdy &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+u^2}2du \\ &= \pi[\arctan(u)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

   où l'on a fait un changement de variable en $u = \sqrt{y}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$.

(c) Pour tout $x > 0, x \neq 1$, on a par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+x^2y} dy \\
&= \frac{1}{1-x^2} [\log(1+y) - \log(1+x^2y)]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{1-x^2} [\log\left(\frac{1+y}{1+x^2y}\right)]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{1-x^2} \log\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{2\log(x)}{x^2-1} \; .
\end{aligned}$$

(d) Par Fubini-Tonelli et puisque $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy = \frac{2\log(x)}{x^2-1}$ pour p.t. $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy dx \\
\frac{\pi^2}{2} &= \int_0^{+\infty} \frac{2\log(x)}{x^2-1} dx \\
\frac{\pi^2}{4} &= \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2-1} dx \; .
\end{aligned}$$

3. Changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x+y \\ v = x-y \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{array} \right. .$$

L'application :

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(u, v) &\mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)
\end{aligned}$$

est bijective. On calcule le jacobien (c'est à dire que l'on écrit dans une matrice les dérivées partielles de ϕ en u et v) :

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

On fait le changement de variable dans l'intégrale et on utilise Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} dx dy &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-v^2} | \det(J(u, v)| du dv \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-v^2} \frac{1}{2} du dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} du \\
&= \frac{\pi}{2} \; .
\end{aligned}$$