UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
`http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Feuille d'exercices numéro 5
Intégrales à paramètre, intégrales multiples.

1. (a) Montrer que $\forall z \geq 0$, $0 \leq 1 - e^{-z} \leq z$.
   (b) En déduire que $\forall y > 0$, $x \mapsto \frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   (c) Pour tout $y > 0$, on pose
   $$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2} dx \ .$$
   Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer $F'(y)$ (on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$).
   (d) En déduire $F(y)$ à une constante près.
   (e) Calculer cette constante en regardant $\lim_{n\to+\infty} F(1/n)$.
2. (a) Montrer que pour tout $y > 0$:
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}.$$
   (b) Montrer que :
   $$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx \right) dy = \frac{\pi^2}{2} \ .$$
   (c) Montrer que pour tout $x > 0, x \neq 1$:
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy = \frac{2\log(x)}{x^2-1} \ .$$
   (d) En déduire que :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4} \ .$$
3. On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En utilisant un changement de variable, calculer :
   $$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} dxdy \ .$$