UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Feuille d'exercices numéro 6
Calculs d'espérances. Calculs de lois.

1. Soit X variable aléatoire réelle de loi de densité $\mathbf{1}_{x\geq 0}\lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$ fixé (loi exponentielle de paramètre λ). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$. Calculer la densité de la loi de $2X$. Calculer $\mathbb{E}(2X)$, $\mathrm{Var}(2X)$.

2. Soit X variable aléatoire réelle de loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma, m \in \mathbb{R}$ fixés (loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$). Soit U variable aléatoire réelle de loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Montrer que $\sigma U + m$ a même loi que X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
   (c) Calculer la densité de la loi de $Y = aX + b$ pour a et b réels.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

3. Soit X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall k \geq 0, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}$ ($\theta > 0$ fixé). Calculer $\mathbb{E}(X)$. Pour $u \geq 0$, calculer $\mathbb{E}(e^{-uX})$.
   <u>Rappel :</u> $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$.

4. Soit (X, Y) variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi de densité $\frac{3}{4}\exp(-|x + 2y| - |x - y|)$. Calculer la densité de la loi de $(X + 2Y, X - Y)$ puis les densités des lois de X et Y. (On pourra utiliser un changement de variable approprié.)

5. Soit Y variable aléatoire réelle de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que $1/Y$ a même loi que Y.

6. M. Dupond attend son bus en moyenne 10 min. tous les matins. Donner une majoration de la probabilité que M. Dupond attende son bus plus de 20 min.