UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 7
Indépendance et calculs de lois.

1. Soit $f \in C_b^+(\mathbb{R})$, on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{1+(1+x^2)^2y^2}dxdy \\ \text{par Fubini-Tonelli} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(1+x^2)^2y^2}dy\right)dx\ . \end{aligned}$$

Donc la densité de X est la fonction de x suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(1+x^2)^2y^2}dy &= \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{1+x^2}\arctan((1+x^2)y)\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\ . \end{aligned}$$

2. Soit $f \in C_b^+(\mathbb{R})$, on calcule :

$$\mathbb{E}(f(X/Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u/v)\frac{1}{2\pi}e^{-u^2/2}e^{-v^2/2}dudv$$

On fait un chamgement de variable en $s = u/v, t = v$, $u = st, v = t$. La matrice jacobienne est :

$$J(s,t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$$

de déterminant t. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X/Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi}f(s)|t|e^{-(st)^2/2}e^{-t^2/2}dsdt \\ \text{par Fubini-Tonelli} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(st)^2/2}e^{-t^2/2}|t|dt\right)ds\ . \end{aligned}$$

Donc la densité de X/Y est la fonction de s suivante (par parité) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(st)^2/2}e^{-t^2/2}|t|dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-(st)^2/2}e^{-t^2/2}tdt \\ (\text{ changement de variable } z = \sqrt{1+s^2}\times t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-z^2/2}z\frac{1}{1+s^2}dz \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-e^{-z^2/2}\frac{1}{1+s^2}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+s^2}\ . \end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X/Y|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s|\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+s^2}ds \\ \text{(parité)} &= \int_{0}^{+\infty} s\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+s^2}ds \\ &= +\infty\end{aligned}$$

car $\frac{s}{1+s^2} \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{s}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$. Donc X/Y n'est pas intégrable.

3. Soit $f \in C_b^+(\mathbb{R}^2)$, on calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X+Y,X-Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x+y,x-y)\frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dxdy \\ \text{(changement de variable déjà vu : u=x+y,v=x-y)} &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi}f(u,v)e^{-(u+v)^2/8-(u-v)^2/8}\frac{1}{2}dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)e^{-u^2/4}e^{-v^2/4}\frac{1}{4\pi}dudv\end{aligned}$$

Donc la densité de $(X+Y,X-Y)$ est la fonction $(u,v)\mapsto e^{-u^2/4}e^{-v^2/4}\frac{1}{4\pi}$. C'est un produit d'une fonction de u et d'une fonction de v donc $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

4. Les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $X+Y$ aussi. Soit $n\in\mathbb{N}$, calculons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \mathbb{P}(\{X=0 \text{ et } Y=n\}\cup\{X=1 \text{ et } Y=n-1\}\cup\cdots\cup\{X=n \text{ et } Y=0\}) \\ \text{événements disjoints} &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=n-k) \\ \text{indépendance} &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\frac{\mu^{n-k}e^{-\mu}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\lambda^k\mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{n!}(\lambda+\mu)^n\ .\end{aligned}$$

Donc $X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

5. (a)
   - Si X est symétrique :
     $\forall\phi\in C_b^+(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(X)) &= \mathbb{E}(\phi(-X)) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)f(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(-t)f(t)dt \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)f(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(u)f(-u)du \text{ (changement de variable } u=-t) \quad .\end{aligned}$$

     Donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)(f(t)-f(-t))dt=0$. Cela est vrai $\forall\phi\in C_b^+(\mathbb{R})$ donc $f(t)-f(-t)$ est nulle presque partout donc $f(t)=f(-t)$ pour presque tout t.
   - Si $f(t)=f(-t)$ pour presque tout t:

$\forall \phi \in C_b^+(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(-X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(-t)f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)f(-t)dt \text{ (par changement de variable)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)f(t)dt \text{ (car } f(t) \text{ et } f(-t) \text{ coïncident presque partout)}
\end{aligned}$$

donc $-X$ est de densité $t \mapsto f(t)$ comme X donc X est symétrique.

(b) Exemple de loi symétrique : $X = 1$ avec probabilité $1/2$ et $X = -1$ avec probabilité $1/2$.

(c)
- Si X est symétrique :
  Pour tout u :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{iuX}) &= \mathbb{E}(e^{-iuX}) \\
&= \overline{\mathbb{E}(e^{iuX})} .
\end{aligned}$$

  Donc $\mathbb{E}(e^{iuX}) \in \mathbb{R}$.
- Si $\mathbb{E}(e^{iuX}) \in \mathbb{R}$, $\forall u$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{iu(-X)}) &= \overline{\mathbb{E}(e^{iuX})} \\
&= \mathbb{E}(e^{iuX}) .
\end{aligned}$$

  Donc X et $-X$ ont même fonction caractéristique donc X et $-X$ ont même loi donc X est symétrique.

(d) Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Si $1 \in A_1$ et $-1 \in A_1$, $\mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(|X| \in A_2) = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$.
- Si $1 \in A_1$ et $-1 \notin A_1$, $\mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(\epsilon = 1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(X > 0, X \in A_2) = \mathbb{P}(X < 0, -X \in A_2)$ car X symétrique donc $\mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X > 0, X \in A_2) + \mathbb{P}(X < 0, -X \in A_2)) = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$.
- Si $1 \notin A_1$ et $-1 \in A_1$, on montre de même que $\mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$.
- Si $1 \notin A_1$ et $-1 \notin A_1$, $\mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = 0 = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$.

On a donc toujours $\mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$, donc ϵ et $|X|$ sont indépendants.

(e) On calcule la fonction caractéristique ;

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{iu(Y-Y')}) &= \mathbb{E}(e^{iuY}e^{-iuY'}) \\
&= \mathbb{E}(e^{iuY})\mathbb{E}(e^{-iuY'}) \text{ (par indépendance)} \\
&= \mathbb{E}(e^{iuY'})\mathbb{E}(e^{-iuY}) \text{ (car } Y \text{ et } Y' \text{ ont même loi)} \\
&= \mathbb{E}(e^{iu(Y'-Y)}) \\
&= \overline{\mathbb{E}(e^{iu(Y-Y')})} .
\end{aligned}$$

Donc par la question 5c, $Y - Y'$ est symétrique.