

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 9

1. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|^{q/p}$ est convexe donc par inégalité de Jensen,
 $\mathbb{E}(|X|^p)^{q/p} \leq \mathbb{E}((|X|^p)^{q/p}) = \mathbb{E}(|X|^q)$.

2.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in \mathbb{N}, a_n \leq k \leq \inf(b_n, n)} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} &= \mathbb{P}(Y_n \in [a_n, b_n]) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in [\sqrt{p(1-p)na} + np, \sqrt{p(1-p)nb} + np]) \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - np}{\sqrt{p(1-p)n}} \in [a, b]\right) \\
 \text{TCL} \quad \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} &\int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X > t_1 + t_2 | X > t_1) &= \frac{\mathbb{P}(X > t_1 + t_2, X > t_1)}{\mathbb{P}(X > t_1)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(X > t_1 + t_2)}{\mathbb{P}(X > t_1)} \\
 &= \frac{\int_{t_1+t_2}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_{t_1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt} \\
 &= \frac{e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{e^{-\lambda t_1}} \\
 &= e^{-\lambda t_2} \\
 &= \mathbb{P}(X > t_2).
 \end{aligned}$$