UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2007-2008
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé du partiel - mardi 23 octobre 2007.
Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

2. (a)

$$\begin{aligned}
\mu([0,1]) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)x^2e^{-x}\mathbf{1}_{[0,2]}(x)\lambda(dx) \\
&= \int_0^1 x^2e^{-x}dx \\
\text{(int. par parties)} &= [-x^2e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}dx \\
\text{(int. par parties)} &= -e^{-1} + [-2xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}dx \\
&= -3e^{-1} + 2 - 2e^{-1} = 2 - 5/e \ .
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} \frac{1}{x}\mu(dx) &= \int_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} \frac{1}{x}\frac{1}{(1-x)}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\lambda(dx) \\
&= \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{x(1-x)}dx \\
&= \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}dx \\
&= \log(3) + \log(3) = 2\log(3) \ .
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mu([0,2]) &= \int_{[0,2]} \mu(dx) \\
&= \int_{[0,2]} \inf(x^2, \frac{1}{\sqrt{x}})\lambda(dx) \\
&= \int_0^2 \inf(x^2, \frac{1}{\sqrt{x}})dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_0^1 x^2dx \\
&= [2\sqrt{x}]_1^2 + [x^3/3]_0^1 \\
&= 2(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{3} = 2\sqrt{2} - 5/3 \ .
\end{aligned}$$

3. (a) Posons $f_n(x) = n^2(1-e^{-x/n})^2$ pour $x \in [1,2]$. Les intégrales dont nous cherchons la limite sont égales à $\int_1^2 f_n(x)dx$. Pour $x \in [1,2]$, $f_n(x) = n^2(x^2/n^2 + o(1/n^2)) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^2$,

donc $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^2$. Pour tout $x \in]0,1]$, $|f_n(x)| \le n^2(x/n)^2 = x^2$ qui est intégrable sur $[1,2]$. Donc, par théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = [x^3/3]_1^2 = 7/3$.

(b) Posons $f_n(x) = (1+x/n)^{-2n}$ (pour $x \ge 0$). Pour tout $x > 0$, $f_n(x) = \exp(-2n\log(1+x/n)) = \exp(-2n(x/n + o(1/n))) = \exp(-x+o(1)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$ (par continuité de la fonction exp). Donc $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \exp(-.)$ sur $[0,+\infty[$. Pour tout n, $x \ge 0$, $|f_n(x)| \le \exp(-2n\times x/n) = e^{-x}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc, par théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.

4. Notons $f(u,x) = \frac{e^{x\log(u)}}{x}$.

(a)
- $x \mapsto \frac{e^{x\log(1/2)}}{x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\int_1^{+\infty} \frac{e^{x\log(1/2)}}{x}dx \le \int_1^{+\infty} e^{x\log(1/2)}dx = e^{\log(1/2)}/\log(1/2)$.
- $\forall x \in [1,+\infty[$, $u \mapsto \frac{e^{x\log(u)}}{x}$ est dérivable de dérivée $u \mapsto \frac{e^{x\log(u)}}{u}$.
- Soit $\epsilon \in]0,1[$, $\forall x \in [1,+\infty[$, $\forall u \in]\epsilon, 1-\epsilon[$, $\left|\frac{e^{x\log(u)}}{u}\right| \le \frac{e^{-x\log(1-\epsilon)}}{\epsilon}$ qui est une fonction de x intégrable sur $]1,+\infty[$.

Par théorème de dérivation globale, $\forall u \in]\epsilon, 1-\epsilon[$, $F'(u) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{x\log(u)}}{u}du = \frac{1}{\log(u)}$. Cela est vrai $\forall \epsilon \in]0,1[$ donc $\forall u \in]0,1[$, $F'(u) = \frac{1}{\log(u)}$.

(b) Pour $x \ge 1$, $\frac{e^{x\log(1/n)}}{x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour tout $x > 0$, $n \ge 2$, $|\frac{e^{x\log(1/n)}}{x}| \le e^{x\log(1/2)}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc, par théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} F(1/n) = \int_1^{+\infty} 0dx = 0$.