UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2008-2009 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

TP numéro 2

On considère un vecteur gaussien (G_1, G_2) où G_1 et G_2 sont de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et telles que $\text{Cov}(G_1, G_2) = \rho$ avec $-1 < \rho < 1$. Le but de ce TP est de comparer diverses méthodes de réduction de variance pour le calcul de

$$I = \mathbb{E}((C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2} - K)_+) \ .$$

Les constantes sont les suivantes $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1,2$, $K = 1$, $\rho = 1/2$.

1. Soient g_1 et g_2 de loi $\mathcal{N}(0,1)$, *indépendantes*. Trouver des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ telles que $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) \overset{\text{loi}}{=} (G_1, G_2)$. En déduire une méthode de simulation de (G_1, G_2).
2. On veut calculer I par une méthode de Monte-Carlo simple. Écrire un programme qui calcule la variance de cette méthode. Combien d'itérations faut-il effectuer dans la méthode de Monte-Carlo pour avoir un résultat I_n qui approche I à 0.1 près avec 95% de chances ? Écrire un programme qui calcule I à 0.1 près avec 95% de chances.
3. Calculer (pour de vrai, à la main) $\mathbb{E}(e^{\sigma_1 G_1 + \sigma_2 G_2})$ pour σ_1 et σ_2 deux nombres réels.
4. Expliciter $\mathbb{E}(C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2})$ et proposer une technique de variable de contrôle visant à réduire la variance de la méthode de Monte-Carlo. Écrire un programme qui calcule les variances. La variance a-t-elle été réduite ?
5. Proposer une méthode de fonction d'importance pour réduire la variance. Programmer cette méthode et comparer les variances.